Dans les ouvrages de la collection

ESSEBIL AU BAC – Mathématiques

vous trouverez chaque trimestre:

Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules,

Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme,

Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances,

Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac.

L'AUTEUR

Dr. Horma Ould Hamoud

•Titulaire d'un CAPES de l'ENS (Nouakchott,1990),

•Docteur en Mathématiques (Spécialité Algèbre, Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, 2002),

•Précédemment enseignant à l'ENS et à l'Université de Nouakchott (FST et FSJE),

•Inspecteur de Mathématiques depuis janvier 2002 en service à l'Inspection Générale de l'Education Nationale (Nouakchott, Mauritanie),

•Coordinateur de la commission de réécriture des programmes de mathématiques et informatique de l'enseignement secondaire.

•Formateur de professeurs et producteur de ressources éducatives et numériques (curriculum, documents d'accompagnement, supports de formation, cours en ligne, formation à distance, applications mobiles, etc ...),

•Membre de la commission nationale chargée des olympiades et rallyes de Maths. Coordinateur de l'équipe de mathématiques.

•Auteur de plusieurs manuels scolaires de mathématiques (cours, exercices corrigés, formulaire, ...) du collège à la terminale,

•Président et membre fondateur de l'ONG Association des Amis de Mathématiques (AMIMATH),

•Site web : https://maurimath.net/

AFD

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

ET DE LA FORMATION TECHNIQUE ET PROFESSIONNELLE

INSPECTION GENERALE

Collection Essebil السبيل au Bac

Mathématiques

Tome 1

Nombres Complexes , Suites et fonctions numériques

7D

Résumés de cours

QCM

Exercices Corrigés

Exercices de synthése

Horma Hamoud

Inspecteur

ESSEBIL

Au Bac

MATHS

TERMINALE D

Tome 1
1er trimestre

Horma Ould Hamoud
Inspecteur de Mathématiques

Dans les ouvrages de la collection
ESSEBIL AU BAC- Mathématiques
vous trouverez :

- ✓ ***Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules ;***
- ✓ ***Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme ;***
- ✓ ***Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances ;***
- ✓ ***Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac ;***
- ✓ ***Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.***

Dépôt légal : 2176/2020

Bibliothèque nationale - Nouakchott

AVANT PROPOS

Chers élèves de la 7ème AS,

Nous sommes heureux de mettre à votre disposition cette nouvelle collection, "ES-SEBIL pour réussir au bac", qui constituer

a, nous l'espérons, un réel cheminement au succès.

A travers cette collection, le Département cherche, à court terme, à améliorer l'enseignement/apprentissage afin d'avoir, de manière concrète, un impact positif sur le niveau des apprenants.

Cette collection touche le programme en vigueur dans toutes ses dimensions aussi bien théoriques que pratiques: rappels de cours, exercices corrigés et exercices d'entrainement. Elle couvre toutes les disciplines de bases, toutes séries confondues: sciences de la nature (SN), mathématiques (M) et lettres (LM et LO).

Permettez-nous, ici, d'exprimer nos sincères remerciements à nos frères inspecteurs pour leurs efforts vivement louables et sincèrement reconnus.

Nous vous souhaitons, chers candidats au bac, plein succès et réussite et prions qu'Allah, le Tout-Puissant, vous aide à en tirer profit.

وعلى الله قصد السبيل

L'Inspecteur Général

Sommaire

CHAPITRE 1 NOMBRES COMPLEXES

I. RESUME DE COURS

Le nombre i

Il existe dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, noté i tel que $i^2 = -1$.

Le nombre i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

On a alors : $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $\frac{1}{i} = -i$.

Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient a , b , a' et b' des réels. $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$.

1) $(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a'; b = b')$	4) $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
2) $z + z' = a + a' + i(b + b')$	5) $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
3) $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$	6) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
7) $a + ib \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$	

Définitions et vocabulaire

Soient a et b des réels et $z = a + ib$.

Forme algébrique de z	L'écriture $z = a + ib$
Partie réelle de z	$\mathrm{Re}(z) = a$
Partie imaginaire de z	$\mathrm{Im}(z) = b$
Le conjugué de z	$\bar{z} = a - ib$
Le module de z	$\lvert z \rvert = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument de z où $z \neq 0$. On note $\arg z$	$\arg z = \theta \Rightarrow \left(\cos\theta = \frac{a}{\lvert z \rvert}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\lvert z \rvert} \right)$
Forme trigonométrique de z avec $(z \neq 0; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z \rvert (\cos\theta + i\sin\theta)$
Forme exponentielle de z avec $(z \neq 0; \arg z = \theta)$	$z = \lvert z \rvert e^{i\theta}$

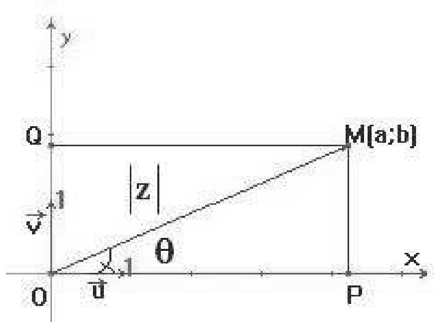
Représentation géométrique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient a et b des réels.

A tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut associer le point $M(a;b)$ du plan.

Le plan est appelé le plan complexe.

Le point image du nombre complexe $z=a+ib$	$M(a;b)$
Le vecteur image du nombre complexe $z=a+ib$	$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
L'affixe du point $M(a;b)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	**Le nombre complexe $z=a+ib$**
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$	**Le nombre z_B-z_A**
L'affixe du milieu du segment $[AB]$	**Le nombre $\frac{z_A+z_B}{2}$**
La distance AB	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$



Conjugué d'un nombre complexe

Soient $a,b\in \mathbb{R}$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $z=a+ib\Rightarrow \bar{z}=a-ib$ **2)** $z=a+ib\Rightarrow z\bar{z}=a^2+b^2$ **3) z est réel** $\Leftrightarrow \bar{z}=z$ **4) z est imaginaire pur** $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$ **5)** $Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$ **6)** $Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$	**7)** $\bar{\bar{z}}=z$ **8)** $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ **9)** $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ **10)** $\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n, \quad n\in \mathbb{Z}$ **11)** $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}=\frac{1}{\overline{z_1}}, \quad z_1\neq 0$ **12)** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2\neq 0$

Module d'un nombre complexe

Soient $a, b \in IR$ et z , z_1 , z_2 des nombres complexes.

1) $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}}$	7) $\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$, $z \neq 0$
2) $z = a + ib \Rightarrow \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	8) $\left\lvert \frac{z_1}{z_2} \right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$, $z_2 \neq 0$
3) $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	9) $\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
4) $\lvert \bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	(L'inégalité triangulaire)
5) $\lvert z_1 z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \lvert z_2\rvert$	10) $AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
6) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$, $n \in Z$	

Argument d'un nombre complexe

Soient z , z_1 , z_2 des nombres complexes non nuls.

1) $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$	5) z est réel $\Leftrightarrow \arg z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
2) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$	6) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
3) $\arg z^n = n \arg z, \quad n \in Z$	Soient A, B, C, D des points tels que $AB \neq 0, CD \neq 0$.
4) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$	7) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$
	8) $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \quad [2\pi]$

Notation exponentielle e^{ix}

Soient x et y des réels.

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$	7) $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
2) $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	8) $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$
3) $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$	9) $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}, \quad n \in Z$
4) $e^{i\pi} = -1$	10) $\lvert e^{ix}\rvert = 1$
5) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	11) Si $z = \lambda e^{ix}$ avec $\lambda \in IR^*$, alors
6) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$	$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \arg z = x \\ \lambda < 0 \Rightarrow \arg z = \pi + x \end{cases}$

Formules d'Euler – Formule de Moivre

Formules d'Euler	**Soit** $x \in IR$ $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
Formule de Moivre	**Soit** $x \in IR$ **et** $n \in Z$; $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

Les formules d'Euler permettent dans certains cas de transformer un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$ en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x (linéarisation).

La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sous forme d'un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Cas particulier : équation à coefficients réels

$az^2 + bz + c = 0$ **où** $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$	**deux solutions réelles distinctes**	$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	**une solution réelle double**	$z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	**deux solutions complexes conjuguées :**	$z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ **et** $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

2. Equation à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$.

❖ **Le discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

❖ **Les racines carrées du discriminant sont les nombres complexes** $\delta = x + iy$ **et** $-\delta = -x - iy$ **tel que** $\delta^2 = \Delta$ **avec** $x; y \in IR$ **:**

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \lvert\Delta\rvert \\ x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \end{cases}$	**Les solutions de l'équation** $az^2 + bz + c = 0$ **:** $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ **et** $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$

3. Somme et produit des solutions:

Somme : $s = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$; **Produit:** $p = z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

1) Nature d'un triangle

Soit ABC un triangle. On pose $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Nature du triangle ABC	Relation caractéristique
Equilatéral	$Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Rectangle en A	Z est un imaginaire pur
Rectangle isocèle en A	$Z = i$ ou $Z = -i$
Isocèle en A	$\lvert Z \rvert = 1$

2) Alignement et orthogonalité

Soient A,B,C,D des points du plan.

Relation complexe	Interprétation géométrique
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel	A,B,C sont alignés($A \neq B, A \neq C$)
$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, $(A \neq B; C \neq D)$ (
$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \pm i$	$AB = CD$ et $(AB) \perp (CD)$ où ($A \neq B, C \neq D$)
$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur	$(AB) \perp (CD)$ où ($A \neq B, C \neq D$)
$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \lambda e^{i\theta}; \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta \; [2\pi]$ et $CD = \lambda AB$
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_D}{z_C - z_D}$ est réel	A,B,C,D sont alignés ou cocycliques

3) Lieux géométriques simples

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Considérons un point variable M d'affixe z. Le point M' d'affixe z'. Les points A,B,Ω sont fixes et d'affixes respectives a,b,ω.

Relation complexe	Ensemble des points M
$\lvert z-\omega\rvert = r\ ,\ r>0$	Cercle de centre Ω et de rayon r
$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	Médiatrice de $[AB]$
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est imaginaire pur	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de B
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
$\arg\frac{z-a}{z-b}=0\quad[\pi]$	Droite (AB) privée de A et B
Le nombre $\frac{z-a}{z-b}$ est réel	Droite (AB) privée de B
$\left\lvert\frac{z-a}{z-b}\right\rvert=k\ ,\ \ k>0;k\neq 1$	Cercle centré sur (AB) de diamètre [IJ] tel que $I=bar\{(A,1);(B,k)\};J=bar\{(A,1);(B,-k)\}$
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[\pi]\ ,\ \alpha\neq 0\quad[\pi]$	Cercle passant par A et B privé de A et B
$\arg\frac{z-a}{z-b}=\alpha\quad[2\pi]\ ,\alpha\neq 0\quad[\pi]$	Arc capable d'extrémités A et B exclues

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses A	B	C	D
1	Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors	$\bar{z}=\frac{1}{z}$	$\bar{z}=-z$	$z\bar{z}=i$	$\bar{z}=z$
2	Si $z=-1+2e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors la forme exponentielle de z est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$i\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\left(-1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$
3	Si $z+\lvert z\rvert=2+4i$, alors	$z=-3+4i$	$z=-3-4i$	$z=4i$	$z=-4+3i$
4	Si $z=(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors	$\arg z=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\arg z=\pi+\frac{\pi}{6}$	$\arg z=\frac{\pi}{6}$	$\arg z=-\frac{\pi}{12}$
5	Si $z=4+(1-5i)i$, alors la partie réelle de z est	9	8	4	-1
6	Si $z_1=\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2=-2\ e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ est égal à	$\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$	$-1-i$	$1-i$

QCM 2

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	La forme algébrique de $\frac{2+5i}{3-2i}$ est	$2+5i$	$\frac{-4}{13}+\frac{19}{13}i$	$\frac{16}{13}+\frac{19}{13}i$	$\frac{6}{5}+2i$
2	Le module de $\frac{\left(2-2i\sqrt{3}\right)^2}{(1+i)(2i)^3}$ est	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$
3	Si $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z, alors le nombre $z^3 e^{i\frac{\pi}{4}}$ est	réel positif	imaginaire pur	réel négatif	d'argument $\frac{\pi}{4}$
4	Si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors le triangle *ABC* est :	isocèle et non rectangle	équilatéral	rectangle et isocèle	rectangle et non isocèle
5	L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que $\left\lvert\frac{z-1+2i}{2+3i}\right\rvert = \sqrt{13}$ est :	un cercle	la médiatrice d'un segment	une droite privée d'un point	un cercle privé de deux points
6	Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}^*$. La forme algébrique de $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est :	$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	$n\cos\theta+in\sin\theta$	$e^{in\theta}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres :

$z_1 = (3+2i)(2-3i), \quad z_2 = \frac{1+5i}{5-i},$

$z_3 = 2-3i+\frac{2i+4}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$

$z_5 = \frac{3-5i}{5+i}+\frac{4-3i}{3+i}, \quad z_6 = \frac{2+5i}{4-i}+\frac{4+i}{2-5i},$

$z_7 = (1-2i)^3, \quad z_8 = \frac{2+3i}{3i}+\frac{5i}{3-2i}$

Exercice 2

On pose $f(z) = (3-2i)z^2+(5-i)z+2+5i$

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$f(i), \quad f(3+2i), \quad f(1+i), \quad f(5-i)$

Exercice 3

On pose $f(z) = (5+i)z+(1+2i)\bar{z}+4-3i$ **où** $\bar{z}$ **désigne le conjugué de z**

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$f(5-i), \quad f(1+2i), \quad f(3+4i), \quad f(5+3i)$

Exercice 4

Soit $f(z) = \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}$ **où z est un nombre complexe.**

1) Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$f(5+i), \quad f(2i), \quad f(3+2i), \quad f(1-i)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations

$f(z) = 1, \qquad f(z) = \frac{3}{2}.$

Ecrire les solutions sous forme algébrique.

Exercice 5

Soit

$$Z_1 = (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}$$
$$Z_2 = (1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}$$

Montrer que Z_1 est réel et Z_2 imaginaire pur.

Exercice 6

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivant:

$z_1 = 4-3i, \quad z_2 = (3+i)(2+5i),$

$z_3 = \dfrac{2+4i}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$

$z_5 = \dfrac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}$

Exercice 7

Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants:

$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \dfrac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \dfrac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$

Exercice 8

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, écrire chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique et exponentielle.

$z_1 = 4+4i, \quad z_2 = 3+i\sqrt{3}, \quad z_3 = \dfrac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \dfrac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$

Exercice 9

Soit $z_1 = 4+4i,\ z_2 = 3+i\sqrt{3}$ **,** $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2},\ z_4 = z_1 z_2$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_3 .

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$.

3.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_4 .

b) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 10 (Bac)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_1 : z^2+2z+10=0$

On note z_1 et z_2 ses solutions avec $\operatorname{Im} z_2 \leq 0$.

b)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_2 : z^2-4z+20=0$

On note z_3 et z_4 ses solutions avec $\operatorname{Im} z_4 \leq 0$.

2) On considère les points A, B, K , L et E d'affixes respectives $z_A = z_1$, $z_B = z_2$, $z_K = z_3$, $z_L = z_4$ et $z_E = z_3 - 2i$.

a) Placer les points A , B, K, L , et E dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Ecrire $z_E = z_3 - 2i$ sous forme algébrique et trigonométrique.

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE et du triangle AKE .

3) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -1+3i$ on pose : $f(z)=\frac{z-2-4i}{z+1-3i}$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)|=1$.

Γ_2 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$.

Exercice 11

1. On pose $P(z)=z^3-5z^2+12z-8$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1)$.

b) Déterminer a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a: $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z)=0$.

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1=1$, $z_2=2+2i$ et $z_3=2-2i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1, z_2 et z_3.

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3.a) Ecrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$.

Exercice 12 (Bac)

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-z^2-4z-6$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=3+2i$, $z_B=-1+i$, $z_C=-1-i$ et $z_D=3$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$.

c) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3|=|z+1-i|$.

Exercice 13

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes : $z^2-4z+13=0$ (E_1) $z^2-6z+13=0$ (E_2)

2. Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3-2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-2-3i}{z-3+2i}$

Calculer $\alpha = f(7+4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2+3i$, $z_B=3-2i$ et $z_C=5+i$.

a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C.

b) Calculer $f(z_C)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$.

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine réelle :
$z^3-(6+3i)z^2+(21+19i)z-26(1+i)=0$

Exercice 15 (Bac)

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2.

2) En déduire le module et un argument de a.

3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.) On pose :

$P(z)=z^3-(11+6i)z^2+(28+38i)z-12-60i$ où z est un nombre complexe.

1) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$.

2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

Exercice 17

Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z)=0$ sachant que z_0 est réel, et $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$ si $\sin\theta \geq 0$.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que EDBG et CDFH soient des parallélogrammes. Soient a,b,c,d,e,f,g et h les affixes respectives des points A,B,C,D,E,F,G et H.

1) Exprimer $c-a$ en fonction de $b-a$, puis $f-d$ en fonction de $e-d$.

2) Exprimer g en fonction de b,d et e ; puis h en fonction de c,d et f.

3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

$$z_1 = (3+2i)(2-3i)$$
$$= 6-9i+4i+6i^2$$
$$= 6-9i+4i-6$$
$$= 12-5i.$$

$$z_2 = \frac{1+5i}{5-i}$$
$$= \frac{(1+5i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}$$

$$z_2 \quad = \frac{5+i+25i-5}{25+1} \quad = \frac{26i}{26} \quad = i.$$

$$z_3 = 2-3i+\frac{2i+4}{2+3i} \quad = \quad \frac{(2-3i)(2+3i)+2i+4}{2+3i}$$
$$= \frac{4+9+2i+4}{2+3i} \quad = \frac{17+2i}{2+3i}$$

$$= \frac{(17+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \quad = \frac{34-51i+4i+6}{4+9}$$
$$z_3 = \frac{40}{13}-\frac{47}{13}i.$$

$$z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i) \quad = (1+2i)(1-2i)(3-5i)$$
$$= 5(3-5i)$$
$$z_4 = 15-25i.$$

$$z_5 = \frac{3-5i}{5+i}+\frac{4-3i}{3+i} = \frac{(3-5i)(3+i)+(5+i)(4-3i)}{(5+i)(3+i)}$$
$$= \frac{9+3i-15i+5+20-15i+4i+3}{15+5i+3i-1}$$

$$z_5 = \frac{37-23i}{14+8i} = \frac{(37-23i)(14-8i)}{(14+8i)(14-8i)}$$
$$= \frac{334-618i}{196+64}$$
$$z_5 = \frac{334}{260}-\frac{618}{260}i.$$

$$z_6 = \frac{2+5i}{4-i} + \frac{4+i}{2-5i} = \frac{(2+5i)(2-5i)+(4-i)(4+i)}{(4-i)(2-5i)}$$

$$= \frac{4+25+16+1}{8-20i-2i-5} = \frac{46}{3-22i} \times \frac{3+22i}{3+22i}$$

$$z_6 = \frac{138+1012i}{9+484} = \frac{138}{493} + \frac{1012}{493}i.$$

$$z_7 = (1-2i)^3 = (1-2i)(1-2i)^2 = (1-2i)(1-4i-4)$$

$$= (1-2i)(-3-4i) = -3-4i+6i-8$$

$$z_7 = -11+2i.$$

$$z_8 = \frac{2+3i}{3i} + \frac{5i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3-2i)+(3i)(5i)}{3i(3-2i)}$$

$$= \frac{6-4i+9i+6-15}{9i+6} = \frac{-3+5i}{6+9i} \times \frac{6-9i}{6-9i}$$

$$= \frac{-18+27i+30i+45}{36+81}$$

$$= \frac{27+57i}{117}$$

$$z_8 = \frac{27}{117} + \frac{57}{117}i.$$

Enfin $z_8 = \dfrac{3}{13} + \dfrac{19}{39}i$

Corrigé 2

On a : $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2 + 5i$

$$f(i) = (3-2i)(i)^2 + (5-i)i + 2 + 5i$$
$$= -3+2i+5i+1+2+5i$$
$$= 12i.$$

$$f(3+2i) = (3-2i)(3+2i)^2 + (5-i)(3+2i) + 2 + 5i$$
$$= (9+4)(3+2i) + 15 + 10i - 3i + 2 + 2 + 5i$$

$$= 13(3+2i) + 19 + 12i$$
$$= 39 + 26i + 19 + 12i$$
$$= 58 + 38i.$$

$$\begin{aligned} f(1+i) &= (3-2i)(1+i)^2+(5-i)(1+i)+2+5i \\ &= (3-2i)(2i)+5+5i-i+1+2+5i \\ &= 6i+4+8+9i \\ &= 12+15i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5-i) &= (3-2i)(5-i)^2+(5-i)^2+2+5i \\ &= (3-2i)(25-10i-1)+(25-10i-1)+2+5i \\ &= (3-2i)(24-10i)+26-5i \\ &= 72-30i-48i-20+26-5i \\ &= 78-83i. \end{aligned}$$

Corrigé 3

On a $f(z)=(5+i)z+(1+2i)\bar{z}+4-3i$

On remplace z par sa valeur dans chaque cas :

$$\begin{aligned} f(5-i) &= (5+i)(5-i)+(1+2i)\,(\overline{5-i})+4-3i \\ &= 25+1+(1+2i)(5+i)+4-3i \\ &= 30+5+i+10i-2-3i \\ &= 33+8i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1+2i) &= (5+i)(1+2i)+(1+2i)(\overline{1+2i})+4-3i \\ &= 5+10i+i-2+1+4+4-3i \\ &= 12+8i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3+4i) &= (5+i)(3+4i)+(1+2i)(\overline{3+4i})+4-3i \\ &= 15+20i+3i-4+(1+2i)(3-4i)+4-3i \\ &= 15+20i+3-4i+6i+8 \\ &= 26+22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5+3i) &= (5+i)(5+3i)+(1+2i)(\overline{5+3i})+4-3i \\ &= 25+15i+5i-3+(1+2i)(5-3i)+4-3i \\ &= 26+17i+5-3i+10i+6 \\ &= 37+24i. \end{aligned}$$

Corrigé 4

On a

$$\begin{aligned} f(5+i) &= \frac{(1-2i)(5+i)+2+3i}{(3-2i)(5+i)-2-5i} \\ &= \frac{5+i-10i+2+2+3i}{15+3i-10i+2-2-5i} \end{aligned}$$

$$= \frac{9-6i}{15-12i} = \frac{9-6i}{15-12i} \times \frac{15+12i}{15+12i}$$

$$= \frac{135+108i-90i+72}{225+144}$$

$$= \frac{207+18i}{369} \quad = \frac{207}{369} + \frac{18}{369}i$$

$$f(5+i) = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$$

$$f(2i) = \frac{(1-2i)(2i)+2+3i}{(3-2i)(2i)-2-5i} = \frac{2i+4+2+3i}{6i+4-2-5i}$$

$$= \frac{6+5i}{2+i} = \frac{6+5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{12-6i+10i+5}{4+1}$$

$$= \frac{17+4i}{5} \quad = \frac{17}{5} + \frac{4}{5}i.$$

$$f(3+2i) = \frac{(1-2i)(3+2i)+2+3i}{(3-2i)(3+2i)-2-5i}$$

$$= \frac{3+2i-6i+4+2+3i}{9+4-2-5i}$$

$$= \frac{9-i}{11-5i} \times \frac{11+5i}{11+5i} = \frac{99+45i-11i+5}{121+25}$$

$$= \frac{104+34i}{146} = \frac{104}{146} + \frac{34}{146}i$$

$$= \frac{52}{73} + \frac{17}{73}i.$$

$$f(1-i) = \frac{(1-2i)(1-i)+2+3i}{(3-2i)(1-i)-2-5i}$$

$$= \frac{1-i-2i-2+2+3i}{3-3i-2i-2-2-5i}$$

$$= \frac{1}{-1-10i} \times \frac{-1+10i}{-1+10i} = \frac{-1+10i}{1+100}$$

$$= \frac{-1+10i}{101}$$

$$= \frac{-1}{101} + \frac{10}{101}i.$$

$$f(z)=1 \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=1$$
$$\Rightarrow (1-2i)z+2+3i=(3-2i)z-2-5i$$
$$\Rightarrow [(1-2i)-(3-2i)]z=-2-5i-2-3i$$
$$\Rightarrow -2z=-4-8i$$
$$\Rightarrow z=2+4i.$$

$$f(z)=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(1-2i)z+2+3i}{(3-2i)z-2-5i}=\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow 2\big((1-2i)z+2+3i\big)=3\big((3-2i)z-2-5i\big)$$
$$\Rightarrow (2-4i)z+4+6i=(9-6i)z-6-15i$$
$$\Rightarrow [(2-4i)-(9-6i)]z=-6-15i-4-6i$$
$$\Rightarrow (-7+2i)z=-10-21i$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{-10-21i}{-7+2i}\times\frac{-7-2i}{-7-2i}$$
$$\Rightarrow z=\frac{70+20i+147i-42}{49+4}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28+167i}{53}$$
$$\Rightarrow z=\frac{28}{53}+\frac{167i}{53}.$$

Corrigé 5

Pour montrer que Z_1 est réel, il suffit de montrer que $\overline{Z_1}=Z_1$.

On a

$$\overline{Z_1}=\overline{(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}}$$
$$=\overline{(1+5i)^{2020}}+\overline{(1-5i)^{2020}}$$
$$=(\overline{1+5i})^{2020}+(\overline{1-5i})^{2020}$$
$$=(1-5i)^{2020}+(1+5i)^{2020}$$
$$=(1+5i)^{2020}+(1-5i)^{2020}$$
$$=Z_1$$

Alors Z_1 est réel.

Pour montrer que Z_2 est imaginaire pur, il suffit de montrer que $\overline{Z_2}=-Z_2$.

$$\overline{Z_2} = \overline{(1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}}$$
$$= \overline{(1+5i)^{2020}} - \overline{(1-5i)^{2020}}$$
$$= (\overline{1+5i})^{2020} - (\overline{1-5i})^{2020}$$
$$= (1-5i)^{2020} - (1+5i)^{2020}$$
$$= -\left((1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}\right)$$
$$= -Z_2$$

Alors Z_2 **est imaginaire pur.**

Corrigé 6

On utilise les propriétés des modules :

$|z_1| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$

$|z_2| = |3+i||2+5i| = \sqrt{9+1} \times \sqrt{4+25} = \sqrt{290},$

$|z_3| = \left|\dfrac{2+4i}{2+3i}\right| = \dfrac{|2+4i|}{|2+3i|} = \dfrac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{\dfrac{20}{13}},$

$|z_4| = |(1+2i)(3-5i)(1-2i)| = |1+2i||3-5i||1-2i|$

$\quad = \sqrt{1+4} \times \sqrt{9+25} \times \sqrt{1+4} = 5\sqrt{34},$

$|z_5| = \left|\dfrac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}\right| = \dfrac{|(3-5i)|\left|(5+2i)^3\right|}{\left|(2+5i)^4\right|}$

$\quad = \dfrac{\sqrt{9+25} \times (\sqrt{25+4})^3}{(\sqrt{4+25})^4} = \sqrt{\dfrac{34}{29}}.$

Corrigé 7

1) On a

$z_1 = 4+4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

On note $\arg z_1 = \theta_1$ **. Alors :**

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

2) On a $z_2 = 3+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note $\arg z_2 = \theta_2$ **. Alors :**

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

3) On constate que $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ **.**

Alors $|z_3| = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

et $\arg z_3 = \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$

4) On constate que $z_4 = z_1 z_2$ **.**

Alors $|z_4| = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$ **,**

$\arg z_4 = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$

5) On constate que $z_5 = \dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}$ **. Alors**

$|z_5| = \left|\dfrac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4}\right| = \dfrac{|\overline{z_2}||z_1^3|}{|z_2^4|} = \dfrac{|z_2||z_1|^3}{|z_2|^4} = \dfrac{2\sqrt{3}(4\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{3})^4}$ $|z_5| = \dfrac{16}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} \arg z_5 &= \arg\frac{\overline{z_2}\, z_1^3}{z_2^4} = \arg \overline{z_2}\, z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= \arg \overline{z_2} + \arg z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= -\arg z_2 + 3\arg z_1 - 4\arg z_2 \end{aligned}$$

$\arg z_5 = 3\arg z_1 - 5\arg z_2 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{5\pi}{6}$.. **Alors** $\arg z_5 = \dfrac{-\pi}{12}$.

Corrigé 8

D'après l'exercice précédent :

1) $|z_1| = 4\sqrt{2}$ **et** $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$

Forme trigonométrique : $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

ou $z_1 = 4\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Forme exponentielle : $z_1 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) $|z_2| = 2\sqrt{3}$ **et** $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$;

Forme trigonométrique : $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

Ou $z_2 = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$.

Forme exponentielle : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) $|z_3| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ **et** $\arg z_3 = \frac{\pi}{12}$;

Forme trigonométrique : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4) $|z_4| = 8\sqrt{6}$ **et** $\arg z_4 = \frac{5\pi}{12}$;

Forme trigonométrique : $z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_4 = 8\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

5) $|z_5| = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ **et** $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$;

Forme trigonométrique : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\cos\frac{-\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Corrigé 9

1) Forme trigonométrique de z_1 et z_2 :

D'après l'exercice précédent on a :

$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ **, et** $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

2.a) Forme trigonométrique de z_3 :

D'après l'exercice précédent on a : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ (*)

Pour écrire z_3 **sous la forme algébrique, on multiplie par le conjugué du dénominateur :** $z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}} \times \frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$

On obtient : $z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_3 **on obtient :**

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.a) D'après l'exercice précédent on a :

$z_4 = 8\sqrt{6}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$ (*)

Pour la forme algébrique de z_4**, on développe :**

$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3})$

$z_4 = 12 - 4\sqrt{3} + (12+4\sqrt{3})i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) **et** (**) **du nombre** z_4 **on obtient :**

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{12-4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Corrigé 10

1) Résolutions d'équations:

a) E_1 $z^2 + 2z + 10 = 0$

Le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times1\times10 = -36 = (6i)^2$

Les solutions z_1 **et** z_2 **avec** $\mathrm{Im}\, z_2 \leq 0$**:**

$z_1 = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i$ **et** $z_2 = \frac{-2-6i}{2} = -1-3i$

Ensemble de solution : $\boxed{S_1 = \{-1+3i, -1-3i\}}$

b) E_2 **:** $z^2 - 4z + 20 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4\times1\times20 = 16 - 80 = -64 = (8i)^2$

Les solutions z_3 et z_4 avec $\operatorname{Im} z_4 \leq 0$ **:**

$z_3 = \frac{4+8i}{2} = 2+4i$ **et** $z_4 = \frac{4-8i}{2} = 2-4i$

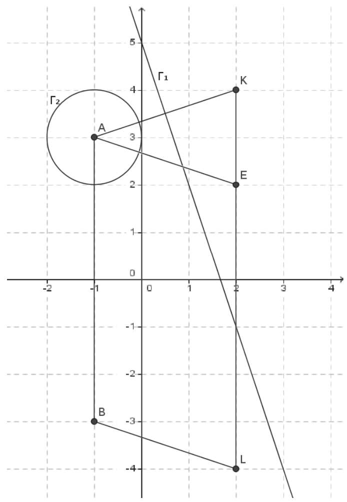
Ensemble de solution : $\boxed{S_2 = \{2+4i, 2-4i\}}$

2.a) Représentation des points :

$z_A = z_1 = -1+3i \Rightarrow A(-1,3)$ **,** $z_B = z_2 = -1-3i \Rightarrow B(-1,-3)$

$z_K = z_3 = 2+4i \Rightarrow K(2,4)$ **,** $z_L = z_4 = 2-4i \Rightarrow L(2,-4)$

$z_E = z_3 - 2i = 2+4i-2i = 2+2i \Rightarrow E(2,2)$



b) Forme algébrique de z_E **:**

$z_E = z_3 - 2i = 2+4i-2i \Rightarrow \boxed{z_E = 2+2i}$

Forme trigonométrique :

$z_E = 2+2i \Rightarrow |z_E| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$z_E = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{z_E = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

c) Nature du quadrilatère ABLE **:**

D'après la figure, il semble que ABLE est un parallélogramme. Pour la démonstration on a :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1-3i+1-3i = -6i$

$z_{\overrightarrow{EL}} = z_L - z_E = 2-4i-2-2i = -6i$

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{EL}} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EL}$

Alors ABLE est un parallélogramme.

Nature du triangle AKE **:**

D'après la figure, il semble que AKE est isocèle en A. Pour la démonstration on a :

$AK = |z_K - z_A| = |2+4i+1-3i| = |3+i| = \sqrt{10}$

$AE = |z_E - z_A| = |2+2i+1-3i| = |3-i| = \sqrt{10}$

AK=AE. Alors le triangle AKE est isocèle en A.

3.a) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$:

On a $f(z) = \dfrac{z-2-4i}{z+1-3i}$**. On constate que** $f(z) = \dfrac{z - z_K}{z - z_A}$ **.**

Alors : $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-z_K}{z-z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - z_K| = |z - z_A| \Leftrightarrow MK = MA$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AK]$**.**

Pour la construction, voir la figure.

b)L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1| = \sqrt{10}$:

On a $|f(z)-1| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1\right| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{-3-i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \dfrac{|-3-i|}{|z+1-3i|} = \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{10}}{|z - z_A|} = \sqrt{10} \qquad \Leftrightarrow |z - z_A| = 1 \qquad \Leftrightarrow AM = 1$

Alors Γ_2 est le cercle de centre A et de rayon 1.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 11

On a pour tout nombre complexe z : $\mathbf{P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8}$

1. a) En remplaçant z par 1 on obtient :

$\mathbf{P(1) = (1)^3 - 5(1) + 12(1) - 8 = -4 + 4 = 0}$

b) <u>1ère méthode : identification</u>

Pour déterminer a et b tels que : $\mathbf{P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)}$**, on utilise une identification (Développer, réduire, ordonner le second membre et identifier) :**

$(z-1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz\ -z^2-az-b$

$= z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$

Par identification :

$z^3-5z^2+12z-8=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$, pour tout $z\in\mathbb{C}$; on obtient le

système : $\begin{cases} a-1=-5 \\ b-a=12 \\ -b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=8 \end{cases}$

Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

2ème méthode : Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} z^3-5z^2+12z-8 & z-1 \\ \cline{2-2} z^3-z^2 & z^2-4z+8 \\ -4z^2+12z-8 & \\ -4z^2+4z & \\ 8z-8 & \\ 8z-8 & \\ 0 & \end{array}$$

On en déduit que, pour tout $z\in\mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

soit $a=-4$ et $b=8$.

3ème méthode : Tableau d'Horner

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(1)$ et factoriser $P(z)$, (si $P(1)=0$) :

	1	-5	12	-8
1		1	-4	8
	1	-4	8	0

D'où : $a=-4$, $b=8$, $P(1)=0$ et $P(z) = (z-1)(z^2-4z+8)$

c) L'équation $P(z)=0$ équivaut $z-1=0$ ou $z^2-4z+8=0$.

* Si $z-1=0$ on obtient la solution $z_1=1$

*Si $z^2-4z+8=0$, on a $\Delta=16-32=-16=(4i)^2$

Les solutions de cette équation sont : $z_2 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$; $z_3 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

(Ces solutions sont conjuguées car les coefficients sont réels et le discriminant est négatif).

L'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ est : $S = \{1; 2+2i; 2-2i\}$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les points A, B et C sont d'affixes : $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$.

a) Calcul de modules arguments :

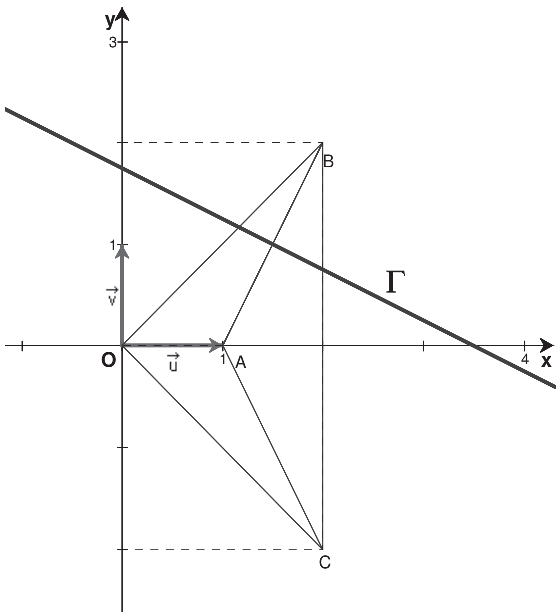
$|z_1| = |1| = 1$, $\arg z_1 = 0 \ [2\pi]$

$|z_2| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$|z_3| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}$, $\arg z_3 = \frac{-\pi}{4} \ [2\pi]$

b) Représentation des points :

Les points A,B et C ont pour affixes Les points $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$. Alors $A(1;0)$, $B(2;2)$ et $C(2;-2)$.



3.a) On a :

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i}$$
$$= \frac{1+i}{1-i}$$
$$= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2}$$
$$= i$$

On remarque que $\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$. Alors $\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = i$, d'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

b) Pour déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$, on constate que cette égalité peut s'écrire : $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1$

Alors $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$

D'où l'ensemble Γ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode 2 : Equation de Γ

On pose $z = x + iy$;

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |z-2-2i|$$

$$\Leftrightarrow |x-1+iy| = |x-2+(y-2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 7 = 0$$

D'où l'ensemble Γ est la droite d'équation $2x + 4y - 7 = 0$.

Remarque :

L'équation $2x + 4y - 7 = 0$ représente la médiatrice du segment $[AB]$.

Corrigé 12

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Pour calculer $P(3)$ on remplace dans l'expression de $P(z)$:

$$P(3) = 3^3 - 3^2 - 4 \bullet 3 - 6 = 27 - 9 - 12 - 6 = 0$$

b) Pour déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser une identification ou une division euclidienne :

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - z^2 - 4z - 6 & z - 3 \\
\cline{2-2}
z^3 - 3z^2 & z^2 + 2z + 2 \\
\quad 2z^2 - 4z - 6 & \\
\quad 2z^2 - 6z & \\
\qquad 2z - 6 & \\
\qquad 2z - 6 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

On en déduit que $P(z) = (z-3)(z^2 + 2z + 2)$, soit $a = 2$ et $b = 2$.

<u>Remarque :</u>

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(3)$ et factoriser $P(z)$, (si $P(3) = 0$) :

	1	-1	-4	-6
3		3	6	6
	1	2	2	0

D'où : $a = 2$, $b = 2$, $P(3) = 0$ et $P(z) = (z-3)(z^2 + 2z + 2)$

c) Pour résoudre l'équation $P(z) = 0$:

soit $z - 3 = 0$, d'où $z_0 = 3$.

soit $z^2 + 2z + 2 = 0$, d'où $\Delta = -4 = (2i)^2$, et les solutions sont : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -1 + i$.

Alors l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est :

$$S = \{3, -1 + i, -1 - i\}$$

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

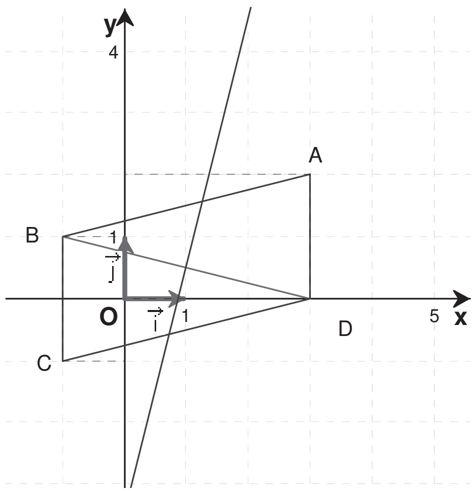
a) Pour placer les points A , B , C et D on a :

$z_A = 3+2i \Rightarrow A(3,2)$

$z_B = -1+i \Rightarrow B(-1,1)$

$z_C = -1-i \Rightarrow C(-1,-1)$

$z_D = 3 \Rightarrow D(3,0)$



b) L'affixe du milieu de $[AC]$ est égale à :

$$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{3+2i-1-i}{2}$$
$$= \frac{2+i}{2}$$
$$= 1+\frac{1}{2}i$$

L'affixe du milieu de $[BD]$ est égale à :

$$\frac{z_B+z_D}{2} = \frac{3-1+i}{2} = \frac{2+i}{2} = 1+\frac{1}{2}i$$

On constate que les milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$ ont la même affixe.

c) D'après le résultat précédent on déduit que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

d) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

Alors $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_B|$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow MD = MB$ **. Alors Γ est la médiatrice du segment $[BD]$.**

<u>Remarque :</u>

En utilisant la forme algébrique $z = x+iy$ on trouve que Γ est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que: $|x-3+iy| = |x+1+(y-1)i|$

Après le calcul des modules et la simplification on obtient une équation cartésienne de Γ : $8x - 2y - 7 = 0$. C'est l'équation d'une droite qu'on peut représenter facilement. On peut vérifier que c'est la médiatrice du segment $[BD]$.

Corrigé 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résolutions d'équations:

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \qquad (E1)$$

Le discriminant: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36 = (6i)^2$

Les solutions: $z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$ **et** $z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \qquad (E2)$$

Le discriminant: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 = (4i)^2$

Les solutions: $z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$ **et** $z_2 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$

2. On a : $f(z) = \frac{z-2-3i}{z-3+2i}$

$\alpha = f(7+4i)$

$\alpha = \frac{7+4i-2-3i}{7+4i-3+2i}$

$\alpha = \frac{5+i}{4+6i}$

Pour l'écriture algébrique, on multiplie par le conjugué du numérateur :

$$\alpha=\frac{5+i}{4+6i}\times\frac{4-6i}{4-6i}=\frac{20-30i+4i+6}{4^2+6^2}=\frac{26-26i}{52}$$

$$\alpha=\frac{26(1-i)}{26\bullet 2}=\frac{1-i}{2}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Pour la forme trigonométrique, on a:

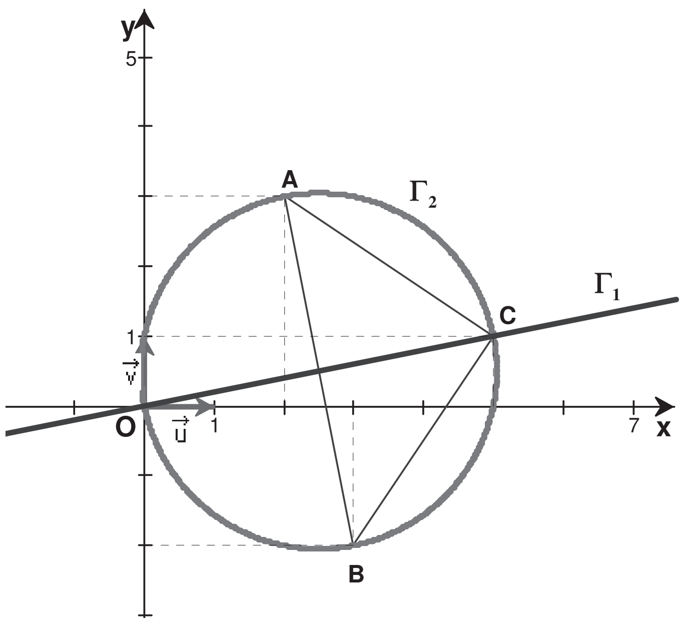
$$|\alpha|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

3. On a : $z_A=2+3i$, $z_B=3-2i$ et $z_C=5+i$.

a) Représentation des points A , B et C.



b) Calcul de $f(z_C)$:

$$f(z_C)=\frac{5+i-2-3i}{5+i-3+2i}=\frac{3-2i}{2+3i}=\frac{-3i^2-2i}{2+3i}=\frac{-i(3i+2)}{2+3i}=-i$$

Forme algébrique : $f(z_C)=-i$

Forme trigonométrique: $f(z_C)=1(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$

Pour la ature du triangle ABC, on constate que : $f(z_C)=\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$

Alors $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$. D'où le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

c) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$:

On constate que $f(z)=\frac{z-z_A}{z-z_B}$.

Alors : $|f(z)|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1\Leftrightarrow|z-z_A|=|z-z_B|\Leftrightarrow MA=MB$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AB]$.

Pour la construction, voir la figure.

d) L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur :

On a : $f(z)$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ est imaginaire pur

Alors Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 14

- **Soit $z_0 = \alpha$,$\alpha \in \mathbb{R}$ la solution réelle de l'équation**

E : $z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$

Alors : $\alpha^3 - (6+3i)\alpha^2 + (21+19i)\alpha - 26(1+i) = 0$

$\alpha^3 - 6\alpha^2 - 3i\alpha^2 + 21\alpha + 19i\alpha - 26 - 26i = 0$

$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 + (-3\alpha^2 + 19\alpha - 26)i = 0$

- **On résout le système :**

$$\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 = 0 & (1) \\ -3\alpha^2 + 19\alpha - 26 = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) On trouve : $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \dfrac{13}{3}$.

En remplaçant dans (1) on trouve que $\alpha_1 = 2$ vérifie (1) et $\alpha_2 = \dfrac{13}{3}$ ne vérifie pas (1) Alors $z_0 = 2$

- **On pose** $P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$,

	1	**-6-3i**	**21+19i**	**-26-26i**
2	╳	**2**	**-8-6i**	**26+26i**
	1	**-4-3i**	**13+13i**	**0**

Alors : $P(z) = (z-2)(z^2 + (-4-3i)z + 13 + 13i)$

- **Résolvons l'équation :** $z^2 - (4+3i)z + 13 + 13i = 0$

$\Delta = (4+3i)^2 - 52 - 52i = -45 - 28i$.

Par le calcul on obtient une racine carrée $\delta = 2 - 7i$.

Les racines de l'équation du second degré :

$z_1 = \dfrac{4+3i+2-7i}{2} = 3 - 2i; \quad z_2 = \dfrac{4+3i-2+7i}{2} = 1 + 5i$

- **Ensemble de solution :** $S = \{2, 3-2i, 1+5i\}$

Corrigé 15

1) On a : $a^2=\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$

$a^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2}}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ $a^2=\frac{-2\sqrt{3}}{2}+2i\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow a^2=-\sqrt{3}+i$

- **Module :** $|a^2|=|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{3+1}\Rightarrow |a^2|=2$

- **Argument :** Soit θ un réel tel que $\arg a^2=\theta$

Alors : $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow \arg a^2=\frac{5\pi}{6}$.

2.a) Module et argument de a :

- **Module :** $|a^2|=2\Rightarrow |a|=\sqrt{2}$

- **Argument :** $\arg a^2=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow 2\arg a=\frac{5\pi}{6}$

$\arg a=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\quad k\in\{0,1\}$

Soit $k=0\Rightarrow \arg a=\frac{5\pi}{12}$

Soit $k=1\Rightarrow \arg a=\frac{5\pi}{12}+\pi=\frac{17\pi}{12}$.

Comme $\mathrm{Re}(a)>0$ et $\mathrm{Im}(a)>0$, $\arg a\neq\frac{17\pi}{12}$. Enfin , $\arg a=\frac{5\pi}{12}$.

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}\Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}\Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n=k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$:

$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \dfrac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \dfrac{12k}{5}$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc k est divisible par 5. On prend $k = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \dfrac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$

Alors, l'ensemble des valeurs de n tels que a^n soit réel c'est les multiples de 12.

Corrigé 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

a)Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que:

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le <u>tableau d'Horner :</u>

	1	$-11-6i$	$28+38i$	$-12-60i$
3		3	$-24-18i$	$12+60i$
	1	$-8-6i$	$4+20i$	0

Alors, $P(3) = 0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i)$.

Donc $a = -8-6i$ et $b = 4+20i$.

b) L'équation $P(z) = 0$ équivaut à $z - 3 = 0$ ou $z^2 + (-8-6i)z + 4 + 20i = 0$

On a $z - 3 = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

Le discriminant de l'équation du second degré est

$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i) = 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$

$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2$. **Donc** $\delta = 4 + 2i$.

Les solutions sont : $z_1 = \dfrac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i$ **et** $z_2 = \dfrac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i$.

<u>Conclusion :</u> L'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $S = \{3,\ 6+4i,\ 2+2i\}$.

Corrigé 17

Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=z^3-(1+2\cos\theta)z^2+(1+2\cos\theta)z-1$ où $\theta\in[0;2\pi[$.

1.a) Calcul de $P(1)$:

$$P(1)=1-(1+2\cos\theta)\times1^2+(1+2\cos\theta)\times1-1=0$$

- Pour résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$, on factorise $P(z)$ et pour cela on peut utiliser la division euclidienne , une identification ,ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme P

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	1
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Alors Pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-2\cos\theta z+1)=0$

soit $z-1=0 \Rightarrow z_0=1\in\mathbb{R}$

ou $z^2-2\cos\theta z+1=0$

Résolvons l'équation : $z^2-2\cos\theta z+1=0$

$$\begin{aligned}\Delta' &= (-\cos)^2-1\times1\\ &= \cos^2\theta-1\\ &= -(1-\cos^2\theta)\\ &= (i\sin\theta)^2\end{aligned}$$

Donc

$$z'=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{1}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$z''=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1}=\cos\theta-i\sin\theta$$

Si $\sin\theta\geq0$, $\text{Im}(z_1)\geq0 \Rightarrow z_1=z'=\cos\theta+i\sin\theta$ et $z_2=\cos\theta-i\sin\theta$.

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$ est : $S=\{1;\cos\theta+i\sin\theta;\cos\theta-i\sin\theta\}$.

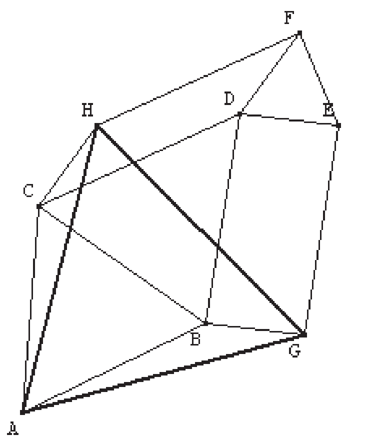
Corrigé 18

1) ABC est équilatéral direct :

$\Rightarrow \dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

DEF est équilatéral direct :

$\Rightarrow \dfrac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$



2) EDBG est un Parallélogramme

$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = b+e-d$

DCHF est un parallélogramme $\Rightarrow h-c = f-d \Rightarrow h = c+f-d$

3) On calcule $\dfrac{h-a}{g-a}$

$g-a = b-a+e-d, \quad h-a = c-a+f-d$

$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$

$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d) \Rightarrow h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$

$\dfrac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Rightarrow$ AGH est équilatéral direct.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(2-4i)z-4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-1-i$, $z_B=2i$ et $z_C=-1+i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z+1-i|=3$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1+2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-3-i}{z-1-2i}$.

1) Calculer le nombre $\alpha=f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A=1+2i$ et $z_B=3+i$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)|=1$; **b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. ;**

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel ; **d) Γ_4 tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.**

3.a) Déterminer et représenter dans le repère précédent un point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en C (deux solutions possibles).

b) Vérifier que C est commun entre Γ_1 et Γ_2 .

Exercice 3

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$.

1) Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

2) Ecrire z_3 sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

4) Justifier les affirmations suivantes :

Le nombre $(z_1)^{2019}$ est réel.

Le nombre $(z_2)^{2019}$ est imaginaire pur.

Exercice 4

1) Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - (4-i)z^2 + 7z - 4 + 7i$.

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-12 - 16i$.

b) Calculer $P(-i)$.

c) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $P(z) = (z+i)(z^2 + az + b)$.

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -i$ et $z_C = 3 - 2i$.

a) Placer les points A, B et C .

b) Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D = 4 + i$

c) Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{z_D - z_C}{z_D - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD .

3) Pour tout nombre complexe $z \neq 1 + 2i$; on pose : $f(z) = \dfrac{z - 3 + 2i}{z - 1 - 2i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{20}$.

Exercice 5

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z - 2 - 4i = 0$

2) On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 - 2z - 8 + 4i$.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux réels a et b tels que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = (1+i)^2$, $z_B = \dfrac{5+5i}{2+i}$ et $z_C = \dfrac{1-5i}{2+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

4) Soit f l'application définie pour tout complexe $z \neq 3+i$ par $f(z) = \dfrac{(1-i)z+2}{z-3-i}$

Montrer que pour tout $z \neq 3+i$, on a : $f(z) = (1-i)\dfrac{z+1+i}{z-3-i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

b. Γ_2 tel que $\arg(f(z)) = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

c. Γ_3 tel que $\arg(f(z)) = \dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]$

d. Γ_4 tel que $|f(z) - 1 + i| = 2\sqrt{10}$.

Exercice 6

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 10z^2 + 33z - 34$.

a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a: $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$. On note z_0 ; z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $\text{Im}(z_2) < \text{Im}(z_0) < \text{Im}(z_1)$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = z_1 + 3i$, $z_B = z_2 + i$ et $z_C = 6 + 2i$.

a) Vérifier que $z_A = 4 + 4i$ et $z_B = 4$.

b) Ecrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique.

c) Placer les points A, B et C dans le repère.

3) Pour tout nombre $z \neq 4 + 4i$ on pose : $f(z) = \dfrac{z-4}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_C) = i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (z_A)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n.

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n > 2015$.

Exercice 7

1) Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 10z^2 + 36z - 40$

a) Calculer $P(2)$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=4-2i$, $z_B=2$ et $z_C=4+2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z\neq 4+2i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z-4+2i}{z-4-2i}$.

a) Vérifier que $f(z_D)=i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{2}$

4) On pose $z_0=f(2i)$. Pour tout entier naturel n on note $z_n={z_0}^n$.

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $|z_n|\geq 2017$.

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2018} appartient à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-(3+2i)z^2+(3+3i)z-4i$.

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$

b) Calculer $P(i)$

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=(z-i)(z^2+az+b)$.

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$.

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=1-i$ et $z_C=2+2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que $\left|\dfrac{z-2-2i}{z-1+i}\right|=1$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n=(z_C)^n$ et $v_n=|z_n|$.

a) Vérifier que $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire l'écriture trigonométrique de z_n.

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

c) Calculer la limite de (v_n) et exprimer en fonction de n la somme $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

Exercice 9 (Bac)

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3+4i$

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2+(3-6i)z-6-10i=0$.

2)Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-2+2i$; $z_B=i$ et $z_C=-1+4i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

3)Pour tout nombre complexe $z\neq i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z+1-4i}{z-i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{2}$.

4) On pose, pour tout entier $n\geq 1$; $z_n=\left(z_A\right)^n$.

a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique.

b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019}, où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019}.

Exercice 10

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$P(z) = z^3 - (4+8i)z^2 + (-16+20i)z + 24 + 8i$.

1.a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:

$P(z) = (z-2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$z^2 + 6z + 25 = 0 \qquad (E)$

1) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\text{Im}(z_1) > 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = z_1 - 6i$, $z_B = z_2 + 4$ et $z_C = -1 + 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 3$, on pose : $f(z) = \dfrac{z+3+2i}{z-3}$.

a) Calculer le nombre $\alpha = f(5-6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$.

Exercice 12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (2+6i)z^2 - 11z - 8 + 6i$

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $Z = 32i$.

b) Calculer $P(2i)$.

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

d) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $P(z) = 0$.

2) Soient A , B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z-2-2i}{z-2i}$ soit imaginaire pur.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (z_D)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n .

a) Ecrire z_n sous forme exponentielle. Montrer que le nombre z_{2020} est réel.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n \geq 2020$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b) On pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 13

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2-4i)z - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a: $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z)=0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=-1-i$, $z_B=2i$ et $z_C=-1+i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z+1-i|=3$.

Exercice 14 (Bac)

1. a) Calculer $(4-2i)^2$.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2+(2-4i)z-6=0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=1+i$, $z_B=-3+3i$ et $z_C=\dfrac{(z_B)^3}{(z_A)^5}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres z_A, z_B puis en déduire celle de z_C.

b) Placer les points A et B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

c) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\dfrac{z_B}{z_A}$ puis interpréter géométriquement.

3) Pour tout nombre complexe $z\neq 1+i$; on pose : $f(z)=\dfrac{z+3-3i}{z-1-i}$.

a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z)=i$. Interpréter géométriquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur ou nul.

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{5}$.

Exercice 15 (Traduit)

Soit z un nombre complexe ; $z \neq 3i$.	**ليكن z عددا عقديا ، $z \neq 3i$ ؛**
On pose : $f(z)=\dfrac{-z-2-i}{z-3i}$.	**نضع: $f(z)=\dfrac{-z-2-i}{z-3i}$.**
1) Déterminer $z_1=f(i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.	**1) عين العدد $z_1=f(i)$ واكتبه على الشكلين الجبري والمثلثي.**
2) Déterminer $z_2=f(1)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.	**2) عين العدد $z_2=f(1)$ واكتبه على الشكلين الجبري والمثلثي.**
3.a) Déterminer le nombre $z_3=f(1-i)$ puis l'écrire sous forme algébrique.	**3.a)عين العدد $z_3=f(1-i)$ واكتبه على الشكل الجبري.**
b) On pose $\theta=\arg z_3$.	**b) نضع $\theta=\arg z_3$.**
Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$. En déduire une écriture trigonométrique du nombre $z_3=f(1-i)$.	**احسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ واستنتج كتابة مثلثية للعدد $z_3=f(1-i)$,**
4) Déterminer puis construire dans le plan complexe l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z telle que $\lvert f(z)\rvert=1$.	**4) عين ثم مثل في المستوي العقدي Γ_1 مجموعة النقط M ذات اللاحق z بحيث $\lvert f(z)\rvert=1$.**
5) Déterminer puis construire dans le plan complexe l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z telle que $\lvert f(z)+1\rvert=2\sqrt{5}$.	**5) عين ثم مثل في المستوي العقدي Γ_2 مجموعة النقط M ذات اللاحق z بحيث $\lvert f(z)+1\rvert=2\sqrt{5}$.**

Exercice 16 (Traduit)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $(E_1)\ : z^2-4z+16=0$ 2) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique. 3) Soit le nombre complexe $u=2-2i\sqrt{3}$. a) En utilisant la forme trigonométrique du nombre u ; déduire tous les nombres complexes z vérifiant $Z^4=u$. b) Déterminer algébriquement tous les nombres complexes x vérifiant $X^2=u$, puis en déduire de nouveau les nombres complexes z vérifiant $Z^4=u$. c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.	1) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $(E_1): z^2-4z+16=0$ 2) اكتب الحلين على الشكل المثلثي. 3) ليكن العدد العقدي $u=2-2i\sqrt{3}$. a) باستخدام الشكل المثلثي للعدد u ؛ استنتج كل الأعداد العقدية Z التي تحقق $Z^4=u$. b) عين جبريا كل الأعداد العقدية X التي تحقق $X^2=u$ ثم استنتج من جديد الأعداد العقدية Z التي تحقق $Z^4=u$. c) استنتج قيم $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 17 (Traduit)

Dans l'ensemble des nombres complexes on pose $P(z)=\frac{z-1+6i}{z+4-i}$ 1) Calculer puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants : $P(-1)$, $P(3+6i)$ et $P(-4+3i)$ 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=1-i$ et écrire la solution sous forme algébrique. 3) On muni le plan complexe d'un repère	في مجموعة الأعداد العقدية نضع: $P(z)=\frac{z-1+6i}{z+4-i}$ 1)احسب ثم اكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد التالية : $P(-1)$ ، $P(3+6i)$ ؛ $P(-4+3i)$ 2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=1-i$ ثم اكتب حلها على الشكل الجبري. 3) ننسب المستوي العقدي إلى معلم قائم

orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :	ومنتظم $(O;\vec{u},\vec{v})$. عين ثم مثل في المستوي مجموعة النقط M ذات اللاحق z في كل من الحالتين التاليتين:
a) $\lvert P(z)\rvert = 1$.	a) $\lvert P(z)\rvert = 1$
b) Le nombre $P(z)$ est réel.	b) العدد $P(z)$ حقيقي.
4) On pose $Z = P(3+6i)$. Soit M_1 ; M_n les points d'affixes respectives Z et Z^n ; $n \in \mathbb{N}^*$.	4) نضع $Z = P(3+6i)$. ولتكن النقطتان M_1 و M_n صورتا العددين Z و Z^n حيث $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que $Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.	a) بين أن $Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
b) Ecrire Z^n sous forme trigonométrique.	b) اكتب Z^n على الشكل المثلثي.
c) Déterminer et représenter dans le plan les points M_1 ; M_2 ; M_3.	c) حدد ثم مثل في المستوي النقط M_1، M_2، M_3.
d) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle en M_1.	d) بين أن المثلث OM_1M_2 قائم ومتساوي الساقين في M_1 .
5.a) Pour quelles valeurs de n ; le point M_n est situé sur l'axe (Ox)?	5.a) من أجل أي قيمة للعدد n تقع M_n على محور الفواصل؟
b) Montrer que les points O ; M_4 ; M_{2008} sont alignés.	b) بين أن النقط O، M_4 ، M_{2008} مستقيمية.
6.a) On pose $U_n = \lvert z_{n+1} - z_n\rvert$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.	6.a) نضع $U_n = \lvert z_{n+1} - z_n\rvert$ ؛ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
b) On pose $S_n = M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.	b) نضع $S_n = M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_nM_{n+1}$ احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

CHAPITRE 2 SUITES NUMERIQUES

I. RESUME DE COURS

Généralités

Définition

On appelle suite numérique, toute application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

Propriété	Condition
On dit que la suite (U_n) est…	Si …
croissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n \geq 0$
strictement croissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n > 0$
décroissante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n \leq 0$
constante	pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} - U_n = 0$
monotone	La suite est croissante ou décroissante
majorée	il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_n \leq M$
minorée	il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_n \geq m$
Bornée	elle est à la fois majorée et minorée
Positive	pour tout entier naturel n ; $U_n \geq 0$
périodique de période $T > 0$	pour tout entier naturel n ; $U_{n+T} = U_n$
Convergente	Elle possède une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$
convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \lvert U_n - \ell \rvert = 0$
Divergente	Elle n'est pas convergente : n'a pas de limite ou possède une limite infinie.

Remarque

Soit (U_n) une suite de termes strictement positifs. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1, \forall n \Rightarrow (U_n)$ est croissante $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1, \forall n \Rightarrow (U_n)$ est décroissante

Suites arithmétiques

Propriété caractéristique	**Il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $U_{n+1} - U_n = r$** **Le réel r est appelé <u>raison</u> de la suite**
Terme général	$u_n = u_0 + nr$
	$u_n = u_1 + (n-1)r$
	$u_n = u_p + (n-p)r$
Raison	$r = \frac{u_p - u_q}{p-q}$, $p \neq q$
Monotonie	$r > 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement croissante
	$r < 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement décroissante
	$r = 0 \Rightarrow (U_n)$ est constante
La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique: $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$	$S = \frac{\text{nombre de termes}}{2}(\text{premier terme} + \text{dernier terme})$ $S = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$
En particulier, la somme des entiers naturels de 1 à n:	$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors le terme b est appelé moyenne arithmétique de a et c	$b = \frac{a+c}{2}$, $U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}$, $U_{n-p} + U_{n+p} = 2U_n$, $n \geq p$
moyenne arithmétique d'une série de n nombres : $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$	$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

<u>Remarque</u>

Toute suite (U_n) définie par $U_n = an + b$, (où $a, b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b.

Suites géométriques

Propriété caractéristique	**il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait** $U_{n+1} = qU_n$ **le réel q est appelé <u>raison</u> de la suite**
Terme général	$u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1} = u_p q^{n-p}$
Raison	$q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$
La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q: $S = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$	$q \neq 1 \Rightarrow$ $S = \text{premier terme} \times \frac{1-(\text{raison})^{\binom{\text{nombre}}{\text{de termes}}}}{1-\text{raison}}$ $q \neq 1 \Rightarrow S = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
	$q = 1 \Rightarrow S = (n-p+1)u_p$
La somme des puissances consécutives d'un nombre :	$1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad x \neq 1$
Convergence **(Premier terme non nul)**	$\|q\| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ $\|q\| > 1 \Rightarrow (U_n)$ est divergente $q = -1 \Rightarrow (U_n)$ est divergente : alternée $q = 1 \Rightarrow (U_n)$ est convergente : constante
Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique , alors le terme b est appelé moyenne géométrique de a et c	$b^2 = ac$ $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1}$ $U_{n-p} \times U_{n+p} = U_n^2, \quad n \geq p$ $U_n = \sqrt{U_{n-1} \times U_{n+1}} = \sqrt{U_{n-p} \times U_{n+p}}, \quad n \geq p$ **si** (U_n) **est une suite positive.**
moyenne géométrique d'une série de n nombres : $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$	$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$

Remarques :

- Toute suite (U_n) définie par $U_n = aq^n$, (où $a, q \in \mathbb{R}$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.
- Si le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est constant, alors la suite est géométrique de raison

$q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Convergence

Propriétés

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.
- Toute suite monotone et bornée converge.
- Si, à partir d'un certain rang, $|U_n - \ell| \leq \alpha_n$, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.
- Si, à partir d'un certain rang, $U_n \leq V_n \leq W_n$, et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$. (Théorème des gendarmes)

Suites adjacentes

Deux suites sont dites adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante, l'autre est décroissante et elles convergent vers la même limite.

- Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$, alors pour tout entier naturel n :

$$\boxed{U_0 \leq U_1 \leq ... \leq U_n \leq \ell \leq V_n \leq V_{n-1} \leq ... \leq V_1 \leq V_0}$$

- Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors :

$$\boxed{(U_n), (V_n) \text{ ont même limite}} \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0} \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1}$$

Raisonnement par récurrence

Principe

On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un entier naturel n. Soit n_0 un entier naturel. Si $P(n_0)$ est vraie, et si pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Etapes de démonstration par récurrence

1) **L'initialisation : On montre que $P(n_0)$ est vraie,**
2) **L'hérédité : On montre que $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie .**
3) **Conclusion : Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie .**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans cet exercice, (U_n) est une suite numérique telle que $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3U_{n+1} - 2U_n = 0$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	Le terme général de la suite (U_n) est	$U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$U_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$	$U_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$
2	(U_n) est une suite	croissante	décroissante	divergente	non monotone
3	La somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ est égale à	$\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{3}$	$3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$	$3\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}\right)$	$\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{3}$
4	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n =$	0	$+\infty$	$-\infty$	1
5	(U_n) est une suite	minorée par 1	majorée par 1	convergente vers 1	Divergente
6	La suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est	géométrique	Arithmétique	constante	Positive

QCM 2

Dans cet exercice (u_n) est une suite à termes strictement positifs, on définit la suite (v_n) de terme général: $v_n = \frac{2}{u_n}$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses A	Réponses B	Réponses C	Réponses D
1	Si (u_n) est majorée par 2, alors (v_n) est:	majorée par 2	minorée par 2	minorée par 1	bornée
2	Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors :	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 2$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sqrt{2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n < \lim\limits_{n\to\infty} v_n$
3	Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est:	croissante	décroissante	constante	non monotone
4	Si (u_n) est géométrique de raison 3 , alors (v_n) est:	géométrique de raison $\frac{2}{3}$	géométrique de raison $\frac{1}{3}$	arithmétique	Divergente
5	Si (u_n) est arithmétique de raison 5 , alors (v_n) :	converge vers $\frac{2}{5}$	converge vers 0	diverge	est arithmétique
6	Si (u_n) est périodique de période 4 , alors (v_n) est:	non monotone	périodique de période 2	convergente	constante

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+2U_n}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$$

On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}, \quad \forall n \in IN$

1.a) Calculer U_1, U_2, V_0, V_1 et V_2.

b) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et déterminer sa raison.

2) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Etudier la convergence de (U_n) et (V_n).

Exercice 2

Pour tout entier naturel n on pose : $U_n = \dfrac{2^n - 4n + 3}{2}$, $V_n = \dfrac{2^n + 4n - 3}{2}$

1) Déterminer la nature de chacune des suites (a_n) et (b_n) tels que:

$a_n = U_n + V_n$; $b_n = U_n - V_n$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$

2) En déduire : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$; $S'_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel n on pose :

$$S_n = \frac{2}{1\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \frac{2}{5\times 7} + \cdots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

1) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3}$$, pour tout $k \in \mathbb{N}$

2) En déduire une expression simple de S_n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

4) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 5 (Bac D)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}.$$

1.a) Calculer U_1 , U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite (U_n) :

- N'est pas arithmétique ;
- N'est pas géométrique ;
- Est convergente.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $V_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$.

a) Montrer que : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) En déduire l'expression de la somme :

$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ **en fonction de** n.

3) Pour tout entier $n \geq 2$, **on pose :** $W_n = \ln V_n$ **et** $S'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$.

Démontrer que : $S'_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)!}{2n}\right)$.

Exercice 6

Soit a_n **et** b_n **les suites définies pour tout** n **entier naturel par :**

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1) Calculer a_1 **et** b_1, a_2 **et** b_2.

2) Soit (u_n) **la suite de terme général** $u_n = a_n + b_n$. **Montrer que** u_n **est constante et calculer** u_n.

3) Soit (v_n) **la suite de terme général** $v_n = a_n - b_n$. **Montrer que** (v_n) **est une suite géométrique. En déduire l'expression de** v_n **en fonction de** n. **Justifier que** (v_n) **est négative.**

4) Exprimer a_n **et** b_n **en fonction de** u_n **et** v_n **puis en fonction de** n. **) En déduire** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

5) Montrer que (a_n) **est croissante et que** (b_n) **est décroissante.**

6) Que peut-on dire des suites (a_n) **et** (b_n) **?**

Exercice 7

Soit (u_n) **et** (v_n) **les suites numériques définies par :**

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calculer u_1, u_2 et v_1 , v_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que w_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser sa limite.

3) Etudier les sens de variations de deux suites u_n et v_n, puis démontrer que u_n et v_n sont adjacentes

4.a) Démontrer que la suite t_n définie par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ est une suite constante.

b) En déduire la limite commune de u_n et v_n.

Exercice 8

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 9

1) Montrer que pour tout réel *x* positif ou nul et pour tout entier *n* positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

2) Soit la suite définie par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

3.a) Montrer que pour tout $n > 0$, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.

b) En déduire le sens de variation de (u_n).

4.a) Monter que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10

Démontrer par récurrence que :

$3+4+5\cdots+n=\frac{(n-2)(n+3)}{2}$; **pour tout** $n \geq 3$.

Exercice 11

Démontrer par récurrence que :

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; **pour tout** $n \geq 1$

Exercice 12 (D'après Bac)

On considère la suite numérique de terme général $U_n=\frac{n}{e^n}$ **, pour tout entier naturel** $n \geq 1$.

1. a) Calculer U_1 **et** U_2.

b) Prouver que la suite (U_n) **est positive et décroissante. Conclure.**

c)Démontrer que : $\forall n \in IN^*$; $U_{n+1}=\frac{1}{e}U_n+\frac{1}{e^{n+1}}$ **(*). En déduire que** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$.

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ **on pose :** $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$.

a) En utilisant l'égalité (*) prouver que : $S_n=\frac{-1}{e-1}U_n+\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$.

b) Déduire de ce qui précède: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1.a) On a :

$$U_1 = \frac{U_0}{1+2U_0} = \frac{1}{3}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{1+2U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$$

$$V_1 = \frac{1}{U_1} = 3$$

$$V_2 = \frac{1}{U_2} = 5$$

b) Pour montrer que la suite (V_n) est arithmétique, il suffit de montrer que la différence $V_{n+1} - V_n$ est constante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+2U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n}$

Alors $V_{n+1} - V_n = 2$ **et la suite** (V_n) **est arithmétique de raison** $r = 2$.

2) On sait que $V_n = V_0 + nr$. **Alors** $V_n = 1 + 2n$.

Or $U_n = \frac{1}{V_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, **on a** $U_n = \frac{1}{1+2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+2n) = +\infty$. **Alors la suite** (V_n) **est divergente.**

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+2n} = 0$. **Alors la suite** (U_n) **est convergente vers 0.**

Corrigé 2

1) On a

$$a_n = U_n + V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} + \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

$$= \frac{2^n + 2^n}{2} = 2^n$$

Donc $\qquad a_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2a_n$

Alors (a_n) **est une suite géométrique de raison** $q = 2$.

On a aussi

$$b_n = U_n - V_n = \frac{2^n - 4n + 3}{2} - \frac{2^n + 4n - 3}{2}$$

$$= \frac{-8n + 6}{2} = -4n + 3$$

$$b_{n+1} = -4(n+1) + 3 = -4n - 4 + 3 = b_n - 4.$$

Alors $b_{n+1} - b_n = 4, \forall n \in \mathbb{N}$ **et la suite** (b_n) **est arithmétique de raison** $r = -4$.

2) Pour calculer les sommes on a :

$$S_n + S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n + V_0 + V_1 + \cdots + V_n$$

$$= (U_0 + V_0) + (U_1 + V_1) + \cdots + (U_n + V_n)$$

$$S_n + S'_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$= a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$

$$S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1$$

D'autre part ;

$$S_n - S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n - V_0 - V_1 - \cdots - V_n$$

$$= (U_0 - V_0) + (U_1 - V_1) + \cdots + (U_n - V_n)$$

$$S_n - S'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$

$$= \frac{(n+1)(b_0 + b_n)}{2}$$

$$S_n - S'_n = \frac{(n+1)(3-4n+3)}{2}$$
$$= (n+1)(-2n+3)$$

$$S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3)$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} S_n + S'_n = 2^{n+1} - 1 & (1) \\ S_n - S'_n = (n+1)(-2n+3) & (2) \end{cases}$$

Par addition $2S_n = 2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)$

Donc $S_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 + (n+1)(-2n+3)]$..

Par soustraction : $2S'_n = 2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)$

Donc $S'_n = \frac{1}{2}[2^{n+1} - 1 - (n+1)(-2n+3)]$.

Corrigé 3

1) On utilise une identification :

(Plusieurs étapes : réduction au même dénominateur ; développement, réduction, ordre puis identification)

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{a(2k+3) + b(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{2ak + 3a + 2bk + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3} = \frac{(2a+2b)k + 3a + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2a+2b)k + 3a + b}{(2k+1)(2k+3)}$$

Par identification :

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$$

Alors $a = 1, b = -1$.

Donc $\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}; \quad \forall k \in IN$

2) Pour trouver une forme simple de S_n **on écrit l'identité précédente pour** $k = 0,1,2,\dots,n$

$$k = 0 \Rightarrow \frac{2}{1\times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{2}{3\times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{2}{5\times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$k = n \Rightarrow \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

On additionne membre à membre et on simplifie on obtient :

$$S_n = 1 - \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Corrigé 4

1) On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

$u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 \Rightarrow u_1 = 1 + 3 \Rightarrow u_1 = 4$

$u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 \Rightarrow u_2 = 4 + 2 + 3 \Rightarrow u_2 = 9$

$u_3 = u_2 + 2\times 2 + 3 \Rightarrow u_2 = 9 + 4 + 3 \Rightarrow u_3 = 16$

2) On a , pour tout entier naturel $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc (u_n) **est strictement croissante.**

3. a) Démonstration par récurrence :

- **On a :** $u_0 = 1 > 0^2$**, la propriété est vraie au rang 0.**
- **On suppose que** $u_n > n^2$ **et on démontre que** $u_{n+1} > (n+1)^2$ **.**

D'après l'hypothèse, en ajoutant $2n+3$**, on obtient** $u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3$

Donc $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$**. Or** $n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$**, alors** $u_{n+1} > n^2 + 2n + 1$**. Enfin** $u_{n+1} > (n+1)^2$ **.**

- **Conclusion : Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** $u_n > n^2$**.**

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** $u_n > n^2$**, et que** n^2 **tend vers +∞ lorsque *n* tend vers +∞,** u_n **tend clairement vers +∞.**

4) D'après 1) on a: $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 9, u_3 = 16$**. On voit apparaître la suite des carrés des entiers consécutifs 1, 2, 3 et 4. La comparaison de la valeur de** u_n **avec le carré de l'indice n permet de conjecturer que** $u_n = (n+1)^2$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**.**

Utilisons une démonstration par récurrence pour montrer cette conjecture.

Pour $n = 0$**, on a que** $u_0 = 1 = (0+1)^2$**. L'égalité est vérifiée.**

- **On suppose que** $u_n = (n+1)^2$ **et on démontre que** $u_{n+1} = (n+2)^2$ **.**

D'après l'hypothèse, en ajoutant $2n+3$**, on obtient** $u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$

Donc $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$u_{n+1} = n^2 + 4n + 4$**, alors** $u_{n+1} = (n+2)^2$ **.**

- **Conclusion : Pour tout** $n \in \mathbb{N}$**,** $u_n = (n+1)^2$**.**

Corrigé 5

La suite numérique (U_n) **est définie pour tout entier** $n \geq 1$ **par :**

$$U_n = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}.$$

1.a) Calcul de termes :

$$U_1 = \frac{1^2 + 1 + 1}{1(1+1)} = \frac{3}{2}$$

$$U_2 = \frac{2^2+2+1}{2(2+1)} = \frac{7}{6} \; ; \qquad U_3 = \frac{3^2+3+1}{3(3+1)} = \frac{13}{12}$$

b) On a : $U_2 - U_1 = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}$ **et** $U_3 - U_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = -\frac{1}{12}$

Comme $U_2 - U_1 \neq U_3 - U_2$**, la suite** (U_n) **n'est pas arithmétique.**

- $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{9}$ **et** $\frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{13}{14}$.

Comme $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$**, la suite** (U_n) **n'est pas géométrique .**

- $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$.

La suite (U_n) **admet une limite finie, donc** (U_n) **est convergente.**

2. Pour $n \geq 1$**,** $V_n = \frac{n^2-1}{n}$.

a) On a : $V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n} = \frac{n^2+2n+1-1}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$$

$$= \frac{n(n^2+2n)-(n+1)(n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-(n^3-n+n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^3+2n^2-n^3+n-n^2+1}{n(n+1)}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

Alors : $U_n = V_{n+1} - V_n$

b) On utilise le résultat précédent pour simplifier la somme $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. On obtient :

$$\begin{cases} U_1 = V_2 - V_1 \\ U_2 = V_3 - V_2 \\ . \\ . \\ . \\ U_{n-1} = V_n - V_{n-1} \\ U_n = V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

En faisant la somme on trouve $S_n = V_{n+1} - V_1$.

On sait que $V_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$ et $V_1 = 0$. Alors $S_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$:

$W_n = \ln V_n$ **et** $S'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$.

On a : $S'_n = \ln V_2 + \ln V_3 + \cdots + \ln V_n = \ln(V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n)$

D'autre part, on peut écrire : $V_n = \dfrac{n^2-1}{n} = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n}$.

Donc : $V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \dfrac{1\times \cancel{3}}{2} \times \dfrac{2\times \cancel{4}}{\cancel{3}} \times \dfrac{3\times \cancel{5}}{\cancel{4}} \times \dfrac{4\times \cancel{6}}{\cancel{5}} \cdots \times \dfrac{(n-1)(n+1)}{\cancel{n}}$ Après simplification, on peut écrire :

$$V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times \cdots \times (n-1)}{2} \times (n+1)$$

On peut aussi écrire :

$$V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times \cdots \times (n-1)\times n\times (n+1)}{2n}$$

D'où : $V_2 \times V_3 \times \cdots \times V_n = \dfrac{(n+1)!}{2n}$. **Enfin** $S'_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)!}{2n}\right)$.

Corrigé 6

1) On a pour n = 0 :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{5}(3a_0 + 2b_0) = \frac{1}{5}(3\times 2 + 2\times 3) = \frac{12}{5} \\ b_1 = \frac{1}{5}(2a_0 + 3b_0) = \frac{1}{5}(2\times 2 + 3\times 3) = \frac{13}{5} \end{cases}$$

Pour n = 1 :

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{5}(3a_1 + 2b_1) = \frac{1}{5}(3\times\frac{12}{5} + 2\times\frac{13}{5}) = \frac{62}{25} \\ b_2 = \frac{1}{5}(2a_1 + 3b_1) = \frac{1}{5}(2\times\frac{12}{5} + 3\times\frac{13}{5}) = \frac{63}{25} \end{cases}$$

2) Pour montrer que (u_n) est une suite constante, il suffit de montrer que $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

$$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) + \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) = \frac{1}{5}(5a_n + 5b_n) = a_n + b_n = u_n.$$

(u_n) est donc constante de terme général $u_n = u_0 = a_0 + b_0 = 5$.

3) Montrons que (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) = \frac{1}{5}(a_n - b_n) = \frac{1}{5}v_n.$$

(v_n) est donc, une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - b_0 = -1$

. On a donc $v_n = v_0 q^n = -1\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-1}{5^n}$.

Il est clair que pour tout n, $\frac{-1}{5^n} < 0$. Donc $v_n < 0$. Alors (v_n) est négative.

4) On a :

$$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 2a_n \\ u_n - v_n = 2b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{u_n + v_n}{2} \\ b_n = \frac{u_n - v_n}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right) \\ b_n = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{5^n}\right) \end{cases}.$$

Comme $\frac{1}{5^n}$ tend vers 0 à l'infini, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{2}$.

5) On a pour tout n :

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - a_n = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n - 5a_n) = \frac{1}{5}(-2a_n + 2b_n) = \frac{2}{5}(-a_n + b_n) = \frac{-2}{5}v_n \\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) - b_n = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n - 5b_n) = \frac{1}{5}(2a_n - 2b_n) = \frac{2}{5}(a_n - b_n) = \frac{2}{5}v_n \end{cases}$$

Alors $\begin{cases} a_{n+1} - a_n > 0 \\ b_{n+1} - b_n < 0 \end{cases}$ car (v_n) est négative.

Donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

6) Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes car (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante, et elles convergent vers la même limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{2}$.

Corrigé 7

Soit (u_n) et (v_n) les suites numériques définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1) Calcul de u_1, u_2 et v_1 , v_2 :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{2}} \quad ; v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4} \rightarrow \boxed{v_1 = \frac{15}{4}}$$

De la même manière on calcule u_2 et v_2 :

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{29}{4}}{2} = \frac{29}{8} \rightarrow \boxed{u_2 = \frac{29}{8}} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{59}{8}}{2} = \frac{59}{16}$$

$$\rightarrow \boxed{v_2 = \frac{59}{16}}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $w_n = v_n - u_n$

a) On montre que (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$:

Nous avons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}$ (on remplace u_{n+1} et v_{n+1} par leurs valeurs dans les formules de récurrences)

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1}+v_n - u_n - v_n}{2}$$

$$= \frac{u_{n+1}-u_n}{2}$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n}{2} - u_n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right)$$

$$= \frac{1}{4} w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Expression de w_n en fonction de n :

(w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 4-3=1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $w_n = w_0.q^n = 1.\left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow \boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$

*** Calcul de la limite de w_n :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$. La raison de la suite w_n vérifie $|q| = \frac{1}{4} < 1$ donc

$\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

3) Sens de variations de u_n et v_n :

Nous avons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\
&= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\
&= \frac{v_n - u_n}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(v_n - u_n\right) \\
&= \frac{1}{2}.w_n \\
&= \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0
\end{aligned}$$

Donc u_n est une suite strictement croissante.

De la même façon on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n \\
&= \frac{u_{n+1} + v_n - 2v_n}{2} \\
&= \frac{1}{2}.\left(u_{n+1} - v_n\right) \\
&= \frac{1}{2}.\left[\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) - v_n\right] \\
&= \frac{1}{2}.\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(u_n - v_n\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{4}\left(v_n - u_n\right) = -\frac{1}{4}w_n < 0$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

*** On montre que u_n et v_n sont adjacentes :**

La suite u_n est une suite strictement croissante, la suite v_n est strictement décroissante. De plus, d'après la question 2) $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\left(v_n - u_n\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. On en déduit que u_n et v_n sont adjacentes

4) (t_n) est la suite définie par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

a) On démontrer que la suite t_n est constante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2.\frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n}{3}$$

$$t_{n+1} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{3}$$

$$= \frac{2\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right) + v_n}{3}$$

$$= \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= t_n$$

Donc pour tout entier naturel n, on a $t_{n+1} = t_n$ la suite (t_n) est donc constante.

b) Calcul de la limite de u_n et v_n :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n = t_0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{3 + 2\times 4}{3} = \frac{11}{3}$

D'autre part, $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{11}{3}$

Puisque $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = l$ on en déduit que $\frac{l + 2l}{3} = \frac{11}{3}$ soit $\boxed{l = \frac{11}{3}}$.

Corrigé 8

Initialisation: Pour $n=1$ la propriété est $1! \geq 2^{1-1}$ ce qui est vrai car $1 \geq 1$.

Hérédité :

Supposons que $n! \geq 2^{n-1}$; et montrons que $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$ c'est-à-dire $n!(n+1) \geq 2^n$.

On sait que pour tout entier *n* strictement positif, on a $n+1 \geq 2$ et par hypothèse $n! \geq 2^{n-1}$. Donc en multipliant les deux inégalités, on obtient $n!(n+1) \geq 2^{n-1} \times 2 = 2^n$.

Conclusion : Pour tout entier *n* strictement positif, on a $n! \geq 2^{n-1}$.

Corrigé 9

1) Démontrons par récurrence :

Initialisation: pour *n* = 0, on a :

$(1+x)^0 \geq 1+0x \Leftrightarrow 1 \geq 1$; la propriété est vraie.

Hérédité :

On suppose que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on montre que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

D'après l'hypothèse en multipliant par $1+x$:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Conclusion : Pour tout entier *n* positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2.a) Calcul de termes :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

Donc $u_1 = \frac{1!}{1^1} = 1$, $u_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{1}{2}$ et $u_3 = \frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

3.a) On a

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1)\times n!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On applique l'inégalité du 1. avec $x = \frac{1}{n}$ **:** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2.$

b) Or tous les termes de la suite sont positifs, on a donc

$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$, **la suite est bien décroissante.**

4.a) Démontrons par récurrence que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ **pour tout entier** $n \geq 1.$

On a $u_1 = 1 \leq \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1$ **; la propriété est vraie pour** $n = 1.$

On suppose que $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ **et on démontre que** $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}.$

D'après l'hypothèse, en multipliant par $\frac{1}{2}$ **:** $0 \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$

D'autre part, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$. **Alors** $u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}.$

La suite (u_n) **est positive, donc** $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}.$

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, **et que** $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, **on a** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **(théorème des gendarmes).**

Corrigé 10

- **Observons que pour n = 3 :**

Le premier membre est égal à 3

Le second membre est égal à $\frac{(3-2)(3+3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$ **.**

La propriété est donc <u>initialisée</u>, elle est vraie au rang n = 3.

- **<u>Supposons</u> que, pour un certain entier $n \geq 3$, fixé, on ait la propriété** $3+4+5\cdots+n = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$ **.**

- **<u>Montrons</u> qu'alors, on a la propriété** $3+4+5\cdots+(n+1) = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ **.**

On a $3+4+5\cdots+(n+1) = (3+4+5\cdots+n)+(n+1)$

Donc d'après l'hypothèse, en ajoutant (n+1) aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} 3+4+5\cdots+n+(n+1) &= \frac{(n-2)(n+3)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{(n-2)(n+3)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n^2-2n+3n-6)+2n+2}{2} \end{aligned}$$

Donc $3+4+5\cdots+n+(n+1) = \frac{n^2+3n-4}{2}$

Enfin $3+4+5\cdots+(n+1) = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ **.**

La propriété est donc <u>héréditaire</u> à partir du rang n = 3.

<u>Conclusion :</u>La propriété $3+4+5\cdots+n = \frac{(n-2)(n+3)}{2}$; **est vraie pour tout entier** $n \geq 3$ **.**

Corrigé 11

- **Observons que pour n = 1 :**

Le premier membre est égal à $1^2 = 1$

Le second membre est égal à $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ **.**

La propriété est donc initialisée, elle est vraie au rang n = 1.

- **Supposons que, pour un certain entier $n \geq 1$, fixé, on ait la propriété** $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- **Montrons qu'alors, on a la propriété** $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

soit $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

D'après l'hypothèse, $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **en ajoutant** $(n+1)^2$ **aux deux membres, on obtient**

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

En factorisant par (n + 1), on obtient

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

On factorise $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ **, on obtient**

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang n = 1.

Conclusion :La propriété $1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ **est vraie pour tout entier** $n \geq 1$.

Corrigé 12

1) La suite (U_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par son terme général $U_n = \frac{n}{e^n}$.

a) Calcul de termes :

$$U_1 = \frac{1}{e^1} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$U_2 = \frac{2}{e^2} = 2e^{-2}$$

b) Nous constatons que $U_n = \frac{n}{e^n}$ est le quotient de deux nombres positifs. Alors pour tout $n \geq 1$, on a : $U_n > 0$.

On a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n}$$

$$= \frac{n+1}{en}$$

$$= \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Or pour tout $n \geq 1, \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ et $1 + \frac{1}{n} \leq 2$, on a $\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$. Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ et la suite (U_n) est décroissante.

Comme la suite (U_n) est décroissante et positive, donc minorée, on conclut qu'elle est convergente.

c) Pour démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} = \frac{1}{e} U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ (*)

on a : $U_{n+1} = \frac{n+1}{e^{n+1}}$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e} \times \frac{n+1}{e^n}$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}\left(\frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}(U_n + \frac{1}{e^n})$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$$

On sait que (U_n) est convergente. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$. Comme $U_{n+1} = \frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}$ et par passage à la limite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e^{n+1}}\right) = \frac{1}{e}\lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{n+1}}$. Donc $\ell = \frac{1}{e}\ell + 0$ d'où $\ell = 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$; $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a) D'après l'égalité $(*)$ on a :

$$\begin{cases} U_2 = \frac{1}{e}U_1 + \frac{1}{e^2} \\ U_3 = \frac{1}{e}U_2 + \frac{1}{e^3} \\ U_4 = \frac{1}{e}U_3 + \frac{1}{e^4} \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ U_n = \frac{1}{e}U_{n-1} + \frac{1}{e^n} \end{cases}$$

En sommant membre à membre ces égalités :

$$U_2 + U_3 + \ldots + U_n = \frac{1}{e}\left(U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}\right) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$$

soit $\quad S_n - U_1 = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$

Comme la partie $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n}$ représente la somme de $(n-1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{e^2}$ et de raison $\frac{1}{e}$, donc:

$$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\cdots+\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e^2}\times\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

Or $U_1=\frac{1}{e}$, donc $\quad S_n-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(S_n-U_n)+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$

$$(1-\frac{1}{e})S_n=\frac{1}{e}-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=\frac{e-1}{e^2-e}-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=-\frac{1}{e}U_n+\frac{e-\frac{1}{e^{n-1}}}{e^2-e}$$

$$(\frac{e-1}{e})S_n=-\frac{1}{e}U_n+\frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n=-\frac{e}{e-1}\bullet\frac{1}{e}U_n+\frac{e}{e-1}\bullet\frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$$

$$S_n=\frac{-1}{e-1}U_n+\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})$$

b) On sait que $\left|\frac{1}{e}\right|<1$.

Cela entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{e^n})=1$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e}{(e-1)^2}(1-\frac{1}{e^n})=\frac{e}{(e-1)^2}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$, **donc** $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{e}{(e-1)^2}$.

V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout $n > 0$ par:

$U_1 = 1; \quad U_{n+1} = \dfrac{U_n}{5U_n + 1}$.

1) Calculer U_2 , U_3.

2) Pour tout $n > 0$ on pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. Ecrire V_n puis U_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

c) Calculer en fonction de n : $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier $n \geq 0$ on a

$u_{n+1} = \dfrac{n}{2n+2} u_n - \dfrac{1}{n+1}$

1. a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

d) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.

c) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n + 2$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

3) On définit la suite (w_n) par $w_n = nu_n$ et soit $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

a) Donner l'expression de w_n à l'aide de v_n.

b) Calculer la somme $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ puis en déduire la valeur de S_n.

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = \frac{3n}{n+1} u_n + \frac{4}{n+1}$$

1.a) Vérifier que $u_2 = \frac{7}{2}$ et $u_3 = \frac{25}{3}$.

b) Justifier que la suite (u_n) n'est in arithmétique, ni géométrique.

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

d) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = nu_n + 2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = \frac{3^n - 2}{n}$.

3) Soit $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$.

A l'aide de v_n, exprimer la somme S_n en fonction de n.

Exercice 4

Soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)U_n$

1.a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2n+5}{2n+3} \leq \frac{5}{3}$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{6} U_n$

c) Prouver alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \leq 3\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et calculer la limite de la suite (u_n).

2) Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = \frac{u_n}{2n+3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Calculer v_0 et exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 5

On définit la suite u_n par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs *a* = 2 et *b* = –3 de u_0 tels que la suite u_n soit constante

2. Soit $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$; après avoir étudiée *f* sur $\mathbb{R}$, tracer sa courbe représentative ainsi que la droite *y = x* sur l'intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de u_n (on prendra $u_0 = 0$).

Conjecturer le comportement de u_n (sens de variation, limite).

3. Montrer que si u_0 est différent de *a* et *b*, il en est de même de u_n (faire une démonstration par récurrence).

4. Calculer $\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$ en fonction de $\frac{u_n-a}{u_n-b}$. En déduire la nature de la suite $v_n=\frac{u_n-a}{u_n-b}$. Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .

Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0=3,\quad U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n ;\forall n\in \mathbb{N}\ ;$$

1) Calculer U_1, U_2.

2) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n=U_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

Exercice 7

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=3-\frac{2n}{3(n+1)}(3-U_n),\ \forall n\in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Vérifier que $U_2=\frac{7}{3}$ puis calculer U_3 ; U_4.

2) On admet que la suite (U_n) est majorée par 3 (a démontrer facilement par récurrence).

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1}-U_n=\frac{n+3}{3(n+1)}(3-U_n)$.

b) Déduire le sens de variation de la suite (U_n). Puis que la suite (U_n) est convergente.

3) On pose pour tout n de IN^* : $V_n = n(3-U_n)$.

a) Calculer $V_1; V_2$ et montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

b) exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de (U_n).

d) Calculer par une deuxième méthode la limite de (U_n).

4) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n$.

Exercice 8

La suite (U_n) est définie par et pour tout entier naturel n, par

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$$

1.a) Calculer les termes U_1, U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2.a) Démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a $U_n \geq 0$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $U_n \geq n-2$.

c) En déduire la limite de la suite (U_n).

3) On définit la suite (V_n) par $V_n = 4U_n - 8n + 24$.

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Démontrer que , pour tout entier naturel n, $U_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

d) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n.

Exercice 9

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = i$ et, pour tout entier n, $z_{n+1} = \frac{1-i}{2} z_n$. Pour n entier naturel, on appelle M_n le point d'affixe z_n.

1)Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 .

2) Montrer que pour tout n entier naturel, $z_n = \frac{e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

3) En déduire que la suite $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique. Donner son terme général et sa limite.

Exercice 10

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0 = 0, \quad U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer U_1 , U_2 , U_3.

2) Démontrer par récurrence que la $U_n \leq 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que (U_n) est croissante ; conclure.

4) Montrer que $3 - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(3 - U_n)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$ . .

5) Démontrer par récurrence que : $3 - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 11 (Bac)

On considère la suite numérique (U_n) définie par $U_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3U_n + 10n - 13$.

1.a) Calculer U_1, U_2 et vérifier que $U_3 = 43$.

b) Justifier que la suite numérique (U_n) n'est ni géométrique ni arithmétique.

2) On définit la suite numérique (V_n) par : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n + 5n - 4$.

a) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme. Exprimer V_n en fonction de n.

b) A partir de quel terme a-t-on $V_n \geq 2013$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 \times (3^n) - 5n + 4$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 12 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}, \quad \forall n \in IN \end{cases}$
1) Calculer $U_1 ; U_2$.	1) احسب $U_1;U_2$.
2.a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.	2.a) أثبت بالتراجع أن لكل n من IN : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.
b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.	b) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة.
c) En déduire que (U_n) est divergente puis calculer sa limite ℓ.	c) استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها ℓ.
3) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}, \quad \forall n \in IN$	3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بما يلي: $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}, \quad \forall n \in IN$.
a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.	a) بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها 1.
b) Donner l'expression de V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n.	b) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج تعبير U_n بدلالة n .
c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.	c) أوجد من جديد $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 13 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $U_n = \frac{n^2}{e^n}$.	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ بما يلي: $U_n = \frac{n^2}{e^n}$.
1) Calculer U_2, U_3 et donner une valeur décimale à 10^{-2} près.	1) احسب U_2 ، U_3 وأعط القيمة العشرية بدقة 10^{-2}.
2) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e}$.	2) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e}$.
3) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e} \leq \frac{9}{4e}$. En déduire que (U_n) est décroissante.	3) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e} \leq \frac{9}{4e}$ واستنتج أن (U_n) متناقصة.
4) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{9}{4e} U_n$. En déduire que $0 \leq U_n \leq \left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2} \times \frac{4}{e^2}$.	4) أثبت أن لكل $n \geq 2$ فإن: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{9}{4e} U_n$؛ واستنتج أن : $0 \leq U_n \leq \left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2} \times \frac{4}{e^2}$.
5) En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$.	5) استنتج $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$.

Exercice 14 (Traduit)

On considère la suite numérique (U_n) définie par: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{2n+2}{3n} U_n, \quad \forall n \in IN^* \end{cases}$;	نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{2n+2}{3n} U_n, \quad \forall n \in IN^* \end{cases}$
On pose pour tout n de IN^* : $V_n = \frac{1}{n} U_n$.	ونضع : $V_n = \frac{1}{n} U_n$ لكل n من IN^*.
1) Calculer U_2 , U_3.	1) احسب U_2 ، U_3 ،
2) Calculer $V_2 ; V_3$.	2) احسب V_2 ، V_3 .
3) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.	3) بين أن (V_n) متتالية هندسية وحدد أساسها
4) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.	4) أعط عبارة V_n ثم U_n بدلالة n .
5) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$.	5) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$.

CHAPITRE 3 GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

I. RESUME DE COURS

Continuité

1) Définitions

f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point de I.

2) Propriétés

- **Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus sont continues sur IR.**
- **La fonction $\sqrt{x}$ est continue sur [0 ; + ∞[.**
- **Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.**
- **La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.**

  Autrement dit :

  - **Si u et v sont continues sur I, alors :**
    - **Les fonctions ku, u + v, u × v et u^n (k réel et n entier naturel non nul) sont continues sur I.**
    - **Les fonctions $\frac{1}{u}$, $\frac{u}{v}$, $\sqrt{u}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.**
  - **Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en f(a) alors la fonction gof est continue en a.**

3) Prolongement par continuité

$\left| \begin{array}{l} \bullet\ a \notin D_f \\ \bullet\ \lim_{x \to a} f(x) = \ell; \quad \ell \in \mathbb{R} \end{array} \right\rangle \Rightarrow$ **f admet un prolongement par continuité g au point a**

Le prolongement de f est la fonction g définie par:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in D_f \\ g(a) = \ell \end{cases}$$

4) Fonctions continues sur un intervalle

> **Par une fonction continue :**
>
> **L'image d'un intervalle est un intervalle.**
>
> **L'image d'un segment est un segment.**

5) Théorème des valeurs intermédiaires

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } I \\ \bullet\ f(I)=J \\ \bullet\ m \in J \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{l'équation } f(x)=m \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans } I \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ m \text{ est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{l'équation } f(x)=m \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans } [a,b] \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f(a)\times f(b) \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{l'équation } f(x)=0 \\ \text{admet au moins une} \\ \text{solution dans } [a,b] \end{array}}$$

6) Théorème de la bijection réciproque

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } I, \\ \bullet\ f \text{ est strictement} \\ \text{monotone sur } I, \\ \bullet\ f(I) = J. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f : I \to J \text{ est bijective.} \\ \bullet\ f^{-1} \text{ est continue sur } J. \\ \bullet\ f^{-1} \text{ est de même sens de variation de } f. \\ \bullet\ f^{-1} \text{ est bijective de } J \text{ sur } I. \\ \bullet\ \text{les courbes de } f \text{ et } f^{-1} \text{ sont symétriques par} \\ \text{rapport à la droite } y = x. \end{array}}$$

Remarques

> **Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à l'équation $f(x)=0$. Le théorème de la bijection réciproque en assure l'unicité.**

Dérivation

1) Nombre dérivé – dérivabilité

f est dérivable au point x_0	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est un nombre réel

Nombre dérivé : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point x_0 de I.

- **Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I (La réciproque est fausse).**

2) Dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivation
k réel (Constante)	0	$]-\infty,+\infty[$
ax+b	a	$]-\infty,+\infty[$
x^n, $n > 0$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivation
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\tan x$	$1+\tan^2 x$	$]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$

3) Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
au	au'
$u+v$	$u'+v'$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(u)^n$	$nu'(u)^{n-1}$
$u \circ v$	$v'.(u' \circ v)$

4) Dérivée de la réciproque

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ f : I \to J \text{ est bijective,} \\ \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet\ f'(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in I. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \\ \bullet\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} \end{array}}$$

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ f(a) = b \\ \bullet\ f'(a) = c \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f^{-1}(b)=a \\ \bullet\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{c} \end{array}}$$

5) Inégalités des accroissements finis

$$\left|\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet\ a, b \in I,\ a < b, \\ \bullet \text{ il existe } m,\ M \in \mathbb{R} \text{ tels que :} \\ m \leq f'(x) \leq M \text{ sur } I. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)}$$

$$\left|\begin{array}{c} \bullet\ f \text{ est dérivable sur } I, \\ \bullet \text{ il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \left|f'(x)\right| \leq M \text{ sur } I. \end{array}\right\rangle \Rightarrow \boxed{\left|f(b) - f(a)\right| \leq M\left|b-a\right|}$$

Courbes : symétries – asymptotes – tangentes

Soit f une fonction numérique et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Eléments de symétrie

Si, pour tout $x \in D_f$, on a $2a - x \in D_f$ et …	alors, C admet …
$f(2a-x) = f(x)$	la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.
$f(2a-x) = 2b - f(x)$	le point $M(a,b)$ comme centre de symétrie.
$f(-x) = f(x)$	l'axe (Oy) comme axe de symétrie et f est paire.
$f(-x) = -f(x)$	l'origine O comme centre de symétrie et f est impaire.

2) Asymptotes parallèles aux axes

Si…	alors la courbe C_f possède une asymptote …
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$	<u>verticale</u> d'équation $x = x_0$
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$	<u>horizontale</u> d'équation $y = y_0$

3) <u>Asymptote oblique et branches paraboliques</u>

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, on calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Trois cas se présentent :

Si…	alors…
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$	C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Oy) en $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	C admet une <u>branche parabolique</u> de direction (Ox) en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$; $a \in \mathbb{R}^*$	on calcule $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$:

- **Soit $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = \infty$, alors C admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$**
- **Soit $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = b$,avec $b \in \mathbb{R}$, alors C admet une asymptote oblique, c'est la droite d'équation $y = ax + b$.**

Cela est équivalent à chacune des situations suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$	$\begin{cases} f(x) = ax + b + \varphi(x), \quad a \neq 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 \end{cases}$

Le signe de $d(x) = f(x)-(ax+b)$ détermine les positions relatives de C et son asymptote oblique.

N.B : les définitions ci-dessus sont analogues lorsque x tend vers $-\infty$.

4) Tangentes

Si..	alors…
f est dérivable en x_0	**C admet une tangente en $M_0(x_0, y_0)$**
D est la tangente à C en $M_0(x_0, y_0)$ **D n'est pas verticale.**	**L'équation de D :** $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
la tangente D// la droite d'équation $y = \mu x + \delta$	$f'(x_0) = \mu$
la tangente D $\perp$ la droite d'équation $y = \mu x + \delta$	$\mu f'(x_0) = -1$
la tangente D est horizontale	$f'(x_0) = 0$
$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$	**C admet une tangente (ou demi tangente) verticale d'équation $x = x_0$.**

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

On considère une fonction numérique f dérivable sur son domaine de définition D_f, de dérivée f'. Son tableau de variation est donné ci-dessous. On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

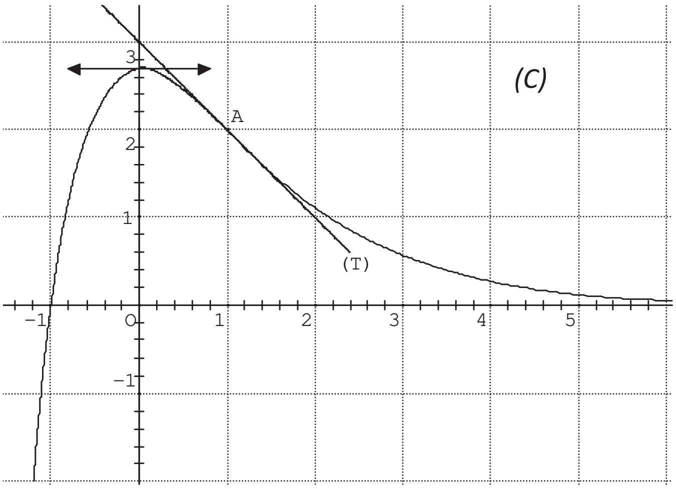
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule réponse est exacte. Préciser la bonne réponse.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	L'ensemble de définition de f est :	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$	$\mathbb{R}\setminus\{2\}$	$\mathbb{R}$
2	L'équation $f(x)=0$ admet dans D_f exactement :	3 solutions	2 solutions	1 solution	aucune solution
3	La courbe (C) admet une asymptote d'équation :	$x=3$	$x=2$	$y=2$	$y=3$
4	La fonction f est une fonction :	paire	impaire	ni paire ni impaire	monotone
5	L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x_0=3$ est :	$x=1$	$y=2$	$y=3x+2$	$y=2x+3$
6	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ est égale à :	0	-3	$-\infty$	$+\infty$

QCM 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.



La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Préciser la bonne réponse.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1	On a	$f(0)=0$	$f'(0)=e$	$f'(0)=0$	$f(0)=-1$
2	Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à :	0	1	-1	3
3	On a	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$	$\lim_{x\to 4} f(x)=0$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=6$
4	L'équation $f(x)=2$	n'a pas de solution	a une unique solution	a deux solutions	a trois solutions
5	On a	$f(1)=0$	$f(1)=1$	$f(1)=2$	$f(1)=3$
6	$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = ...$	0	$+\infty$	$-\infty$	1

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Calculer les limites suivantes (Expliquer la méthode de levée d'indétermination):

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x})$$

Exercice 2

Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **par trois méthodes**

Exercice 3

Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ **dans chacun des cas suivants :**

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=-x^4+2x^2+x$ **et soit** (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A(–1, 0).

2) Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

3) Montrer que la courbe (C) admet des tangentes horizontales en trois points d'abscisses α,β **et** γ **vérifiant :** $-0,9<\alpha<-0,8$, $-0,3<\beta<-0,2$ **et** $1,1<\gamma<1,2$.

Exercice 5

Déterminer les réels *a*, *b*, *c* pour que la courbe de la fonction $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$:

- **passe par le point A(2 ; 4),**
- **admette au point A(2 ; 4), une tangente horizontale, et**
- **aie au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$**

2) Vérifier que le point $\Omega\left(1; \frac{4}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

Exercice 6

Soit $g(x) = \frac{4}{3}x - 1 + \frac{4}{3x-3}$.

1) Dresser le tableau de variations de *g* .

2) Montrer que la courbe (*C*) de *g* admet deux asymptotes dont l'une (*D*) est oblique et préciser la position de (*D*) par rapport à (*C*).

3) Déterminer la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3. Déterminer la position de (T) par rapport à (C).

4) Tracer soigneusement (T), (D) et (C) dans un repère orthonormé.

5) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $4x^2 - (3m+7)x + 3m + 7 = 0$. Retrouver les résultats algébriquement.

Exercice 7

1) Soit $P(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.

Déterminer une racine évidente de *P*, factoriser *P* et déterminer son signe.

2) Soit $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$, soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b) Montrer que f est dérivable sur D_f. Calculer sa dérivée et vérifier que $f'(x) = \frac{P(x)}{(x^2+3)^2}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3.a) Trouver *a*, *b*, *c* tels que pour tout x de D_f : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2+3}$.

b) Montrer que C a une asymptote D et étudier la position de C par rapport à D.

c) Tracez D et C.

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Représenter (C) et (C') la courbe de f^{-1}, dans un nouveau repère.

c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 8

1) On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Calculer P(1) et factoriser P(x).

b) Etudier le signe de $P(x)$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-2}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnée 1 cm pour 2 unités).

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 2. Préciser les asymptotes verticales et horizontales éventuelles.

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) Pour quelle abscisse a la tangente au point d'abscisse a est-elle horizontale ? Justifier.

4)Trouver a, b, c et d tels que pour tout x de D_f :

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}.$$

5) On appelle g la fonction définie par $g(x)=x^2+2x+1$ et P sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f(x) – g(x). Que peut-on en déduire sur les courbes C et P ?

b) Etudier la position relative de C et P.

c) Tracer C, T et P dans le même repère.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$ **:**

En remplaçant chaque x par 2 on reconnaît une forme d'indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ »

Pour lever l'indétermination ici, on factorise et on simplifie par le terme qui s'annule pour x= 2 ; (l'origine de l'indétermination).

Pour factoriser on peut utiliser une identification, une division euclidienne ou le tableau d'Horner.

On obtient

$$\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}=\frac{(x-2)(3x^2-x-1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2-x-1}{x+2},\ x\neq 2.$$

On remplace après la modification d'écriture :

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-1}{x+2}=\frac{3\bullet 2^2-2-1}{2+2}=\frac{9}{4}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^{10}-3^{10}}{x-3}$ **:**

Pour lever l'indétermination ici, on peut appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x)=x^{10}$**, donc** $u'(x)=10x^9$ **et** $\dfrac{x^{10}-3^{10}}{x-3}=\dfrac{u(x)-u(3)}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^{10}-3^{10}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{u(x)-u(3)}{x-3}=u'(3)=10\times 3^9.$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})$ **:**

Pour lever l'indétermination ici, on factorise par le terme prépondérant :

Pour $x > 0$, $x - \sqrt{x} = x(1 - \frac{\sqrt{x}}{x}) = x(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})$ car pour $x > 0$, $x = (\sqrt{x})^2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Corrigé 2

$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$. Calculons $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$:

Méthode 1

Pour faire apparaître le facteur $x - 1$ au numérateur, multiplions et divisons f(x) par la quantité conjuguée du numérateur.

Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Or $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

Méthode 2

Appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x) = \sqrt{x}$, donc $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $f(x) = \frac{u(x) - u(1)}{x - 1}$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{u(x) - u(1)}{x - 1} = u'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

Méthode 3

Factoriser et simplifier par $\sqrt{x} - 1$ (origine de l'indétermination): Pour $x > 0$ et $x \neq 1$ on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1},$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$

Corrigé 3

1) $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-x$

Pour lever l'indétermination ici, on procède à un changement d'écriture :

Pour $x>0$,

$$\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x^2})}=\sqrt{4x^2}\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}=|2x|\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}=2x\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\ .$$

Donc pour $x>0$, $f(x)=2x\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-x=x\ (2\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-1)$.

Or $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ **et** $\lim_{x\to+\infty}(2\ \sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-1)=1$ **donc** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

Une factorisation identique à celle de l'exercice précédent ne nous permet pas de conclure. En effet: pour $x>0$, $f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$ **et l'application des théorèmes nous ramène à une autre forme indéterminée «** $\infty\times 0$ **».**

Voici une technique très utilisée pour modifier l'écriture d'une fonction irrationnelle.

Multiplions et divisons f(x) par son expression conjuguée $\sqrt{x^2+1}+x$

(on fait ainsi apparaître au numérateur l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ **) :**

pour $x>0$, $f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Alors $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$ **donc** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Corrigé 4

1) L'équation de la tangente est du type $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

On a $f(x)=-x^4+2x^2+x$ **donc** $f'(x)=-4x^3+4x+1$ **d'où** $f'(-1)=1$ **et** $f(-1)=-1+2-1=0$.

L'équation de la tangente T est donc $y = 1(x+1)+0 \Leftrightarrow y = x+1$.

2) Cherchons les points de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur celui de T, c'est-à-dire 1 :

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(-x^2+1) = 0$$

Cette équation a trois solutions : $0, 1$ et -1.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$, équation différente de celle de T.

On vérifie par le calcul que : $f'(1) = -4+4+1 = 1$ et $f(1) = 2$ d'où la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = 1(x-1)+2 \Leftrightarrow y = x+1$. C'est bien la même équation de T. Alors T est tangente à (C) en deux points A(–1, 0) et B(1, 2).

3) Il suffit de montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet trois solutions α, β et γ vérifiant : $-0,9 < \alpha < -0,8$, $-0,3 < \beta < -0,2$ et $1,1 < \gamma < 1,2$.

On a : $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$. f' est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires :

f' est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$.

$f'(-0,9) \simeq 0,316$ et $f'(-0,8) \simeq -0,152 \Rightarrow f'(-0,9) \times f'(-0,8) < 0$. Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α telle que $-0,9 < \alpha < -0,8$.

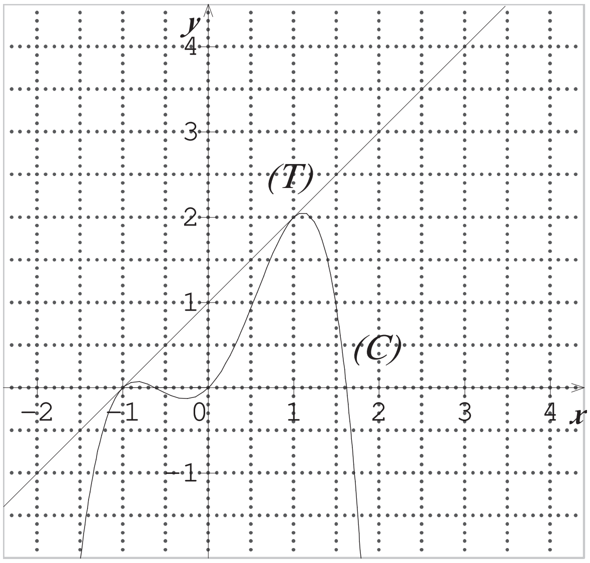
$f'(-0,3) \simeq 0,092$ et $f'(-0,2) \simeq -0,232 \Rightarrow f'(-0,3) \times f'(-0,2) < 0$. Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution β telle que $-0,3 < \beta < -0,2$.

$f'(1,1) \simeq 0,076$ et $f'(1,2) \simeq -1,112 \Rightarrow f'(1,1) \times f'(1,2) < 0$. Donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution γ telle que $1,1 < \gamma < 1,2$.

Conclusion :

La courbe (C) admet des tangentes horizontales en trois points d'abscisses α, β et γ vérifiant : $-0,9 < \alpha < -0,8$, $-0,3 < \beta < -0,2$ et $1,1 < \gamma < 1,2$.

(Voir la figure)



Corrigé 5

1) La courbe de la fonction $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ passe par $A(2\ ;\ 4)$ si $f(2)=4$.

Donc $2a+b+c=4$;

On a $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-1)^2}$. Si (C) a une tangente horizontale au point $A(2\ ;\ 4)$,

alors $f'(2)=0$. Donc $a-\dfrac{c}{(2-1)^2}=0 \Rightarrow a=c$

Si (C) a au point d'abscisse 3 une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x+4$, alors $f'(3)=1$, (le coefficient directeur de la droite). On a donc

$a-\dfrac{c}{4}=1$. Alors $a-\dfrac{a}{4}=1 \Rightarrow a=\dfrac{4}{3}$.

Donc on a :

$$\begin{cases} 2a+b+c=4 \\ a=c \\ a=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Enfin on obtient $a=\dfrac{4}{3}, b=0$ et $c=\dfrac{4}{3}$, soit $f(x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3(x-1)}$.

2) Il suffit de montrer que $\forall x \in D_f, 2-x \in D_f$ et $f(2-x)+f(x)=\frac{8}{3}$.

On a $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow 2-x \neq 1 \Leftrightarrow 2-x \in D_f$

On a

$$\begin{aligned} f(2-x)+f(x) &= \frac{4}{3}(2-x)+\frac{4}{3(2-x-1)}+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)} \\ &= \frac{8}{3}-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3(x-1)} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Alors le point $\Omega\left(1;\frac{4}{3}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.

Corrigé 6

Soit $g(x)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$.

1) La fonction g est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Donc f est continue et dérivable sur son domaine de définition.

$$g'(x)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3(x-1)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\right)=\frac{4}{3}\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow (x=0 \quad \text{ou} \quad x=2)$.

$g(0)=-\frac{7}{3}$ et $g(2)=3$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x-2)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}x-1\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3}x-1\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}(3x-3)=0^- \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to1^+}(3x-3)=0^+ \Rightarrow \lim_{x\to1^+}\left(\frac{4}{3x-3}\right)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to1^+} g(x)=+\infty$$

<u>Tableau de variation :</u>

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		+	0	−	‖	−	0	+	
g	$-\infty$	↗	$-7/3$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

2) On a $\lim_{x\to1^-} g(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to1^+} g(x)=+\infty$. Alors la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à (C).

D'autre part, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ et

$\lim_{x\to\infty}\left(g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3x-3}=0$. Alors la droite D d'équation $y=\frac{4}{3}x-1$ est une asymptote oblique à (C).

Pour étudier la position de (*D*) par rapport à (*C*), on étudie le signe de $d(x)=g(x)-\left(\frac{4}{3}x-1\right)$. Le signe de d(x) est celui de $3x-3$ car $d(x)=\frac{4}{3x-3}$.

Lorsque *x* > 1, $\frac{4}{3x-3}$ est positif, (C) est au dessus de D, lorsque *x* < 1, $\frac{4}{3x-3}$ est négatif,(C) est en dessous de D.

3) L'équation de (T) : $y=g'(3)(x-3)+g(3)$

$$y=1(x-3)+\frac{11}{3}$$

$$y=x+\frac{2}{3}.$$

Pour déterminer la position de (T) par rapport à (C) on a :

$$g(x)-\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3(x-1)}-x-\frac{2}{3}$$

$$g(x) - \left(x + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3} + \frac{4}{3(x-1)}$$

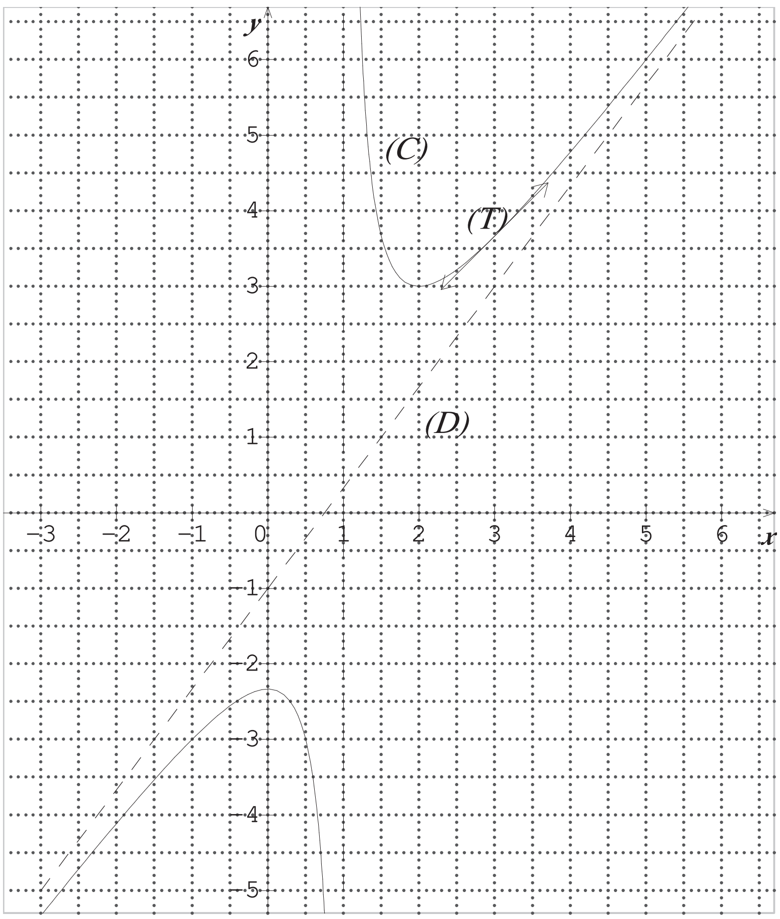
$$g(x) - \left(x + \frac{2}{3}\right) = \frac{x^2 - 6x + 9}{3(x-1)}$$

$$g(x) - \left(x + \frac{2}{3}\right) = \frac{(x-3)^2}{3(x-1)}.$$

Le signe est celui du numérateur :

Lorsque $x > 1$, $\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$ est positif, (C) est au dessus de T, lorsque $x < 1$, $\frac{(x-3)^2}{3(x-1)}$ est négatif, (C) est en dessous de T.

4) Représentation graphique



5) L'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$ équivaut à

$$4x^2-3mx-7x+3m+7=0 \Leftrightarrow 4x^2-7x+7=3m(x-1)$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4x^2-7x+7}{3(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{4}{3}x-1+\frac{4}{3x-3}$$

$$\Leftrightarrow m=g(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=m \\ y=g(x) \end{cases}$$

Le nombre de solutions de cette équation est le nombre de points d'intersections de la courbe (C) de g avec la droite (horizontale) Δ_m d'équation $y=m$.

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de (C) et Δ_m

D'après la représentation graphique de g, on déduit le tableau suivant :

valeurs du paramètre m	nombre d'intersection de (C) et Δ_m	nombre de solutions
$m<-\frac{7}{3}$	2	2
$m=-\frac{7}{3}$	1 (tangente)	1
$-\frac{7}{3}<m<3$	0	0
$m=3$	1 (tangente)	1
$m>3$	2	2

Pour retrouver ces résultats algébriquement, on étudie le signe du discriminant de l'équation $4x^2-(3m+7)x+3m+7=0$.

$\Delta=(3m+7)^2-16(3m+7)=(3m+7)(3m-9)$. **Le discriminant s'annule pour deux valeurs :** $m=-\frac{7}{3}$ **et** $m=3$.

valeurs du paramètre m	Signe du $\Delta=(3m+7)(3m-9)$	nombre de solutions
$m<-\frac{7}{3}$	$\Delta>0$	**2**
$m=-\frac{7}{3}$	$\Delta=0$	**1**
$-\frac{7}{3}<m<3$	$\Delta<0$	**0**
$m=3$	$\Delta=0$	**1**
$m>3$	$\Delta>0$	**2**

Corrigé 7

1) Soit $P(x)=x^4+6x^2-16x+9$.

On remarque que $P(1)=1+6-16+9=0$. **Donc 1 est une racine évidente de P. On peut alors factoriser P(x) par (x – 1) :**

On peut utiliser le tableau d'Horner :

	1	**0**	**6**	**-16**	**9**
1		**1**	**1**	**7**	**-9**
	1	**1**	**7**	**-9**	**0**

Donc $P(x)=(x-1)(x^3+x^2+7x-9)$

On remarque que 1 est une racine évidente de x^3+x^2+7x-9,

On peut utiliser de nouveau le tableau d'Horner :

	1	1	7	-9
1		1	2	9
	1	2	9	0

Ce qui donne $x^3 + x^2 + 7x - 9 = (x-1)(x^2 + 2x + 9)$.

Enfin on obtient : $P(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 9)$.

Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 9$ est négatif : $\Delta = 4 - 36 = -32$, donc le trinôme est du signe de (+1), positif.

Conclusion : $P(x) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 9)$ est toujours positif.

2.a) La fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ est de domaine de définition $D_f = \mathbb{R}$ puisque $x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) La fonction f est rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition.

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3) - (x^3 - x^2 + 3x + 5)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$$

$f'(x) = \dfrac{x^4 + 6x^2 - 16x + 9}{(x^2 + 3)^2}$ d'où $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2 + 3)^2}$

c) D'après 1) on a $\forall x \in D_f, P(x) \geq 0$. Alors $\forall x \in D_f, f'(x) \geq 0$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3.a) On utilise une identification pour déterminer les réels a,b et c tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2+3}.$$

$$ax + b + \frac{c}{x^2+3} = \frac{ax^3 + bx^2 + 3ax + 3b + c}{x^2+3}$$

$$\frac{ax^3 + bx^2 + 3ax + 3b + c}{x^2+3} = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2+3},$$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ 3a = 3 \\ 3b + c = 5 \end{cases}$

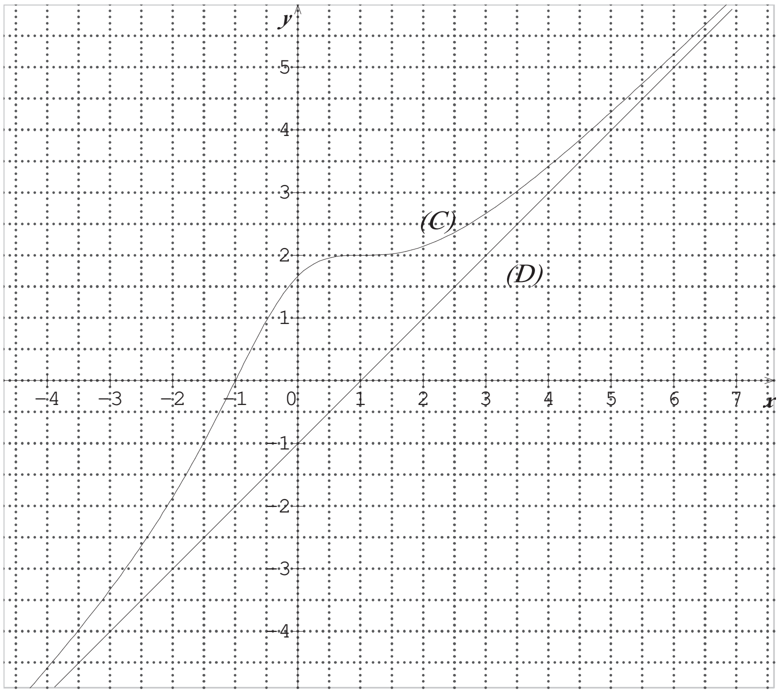
On obtient donc : *a* = 1, *b* = −1, *c* = 8.

Alors $\forall x \in D_f$, **on a :** $f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2+3}$.

b) Or $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2+3} = 0$, **on en déduit que la droite D d'équation** $y = x - 1$ **est une asymptote à (C).**

Comme $f(x) - (x-1) = \frac{8}{x^2+3} > 0$, $\forall x \in D_f$, **la courbe (C) est au-dessus de D toujours.**

c) Représentation graphique :



4.a) D'après l'étude de f et son tableau de variations on a :

- **f est continue sur $]-\infty;+\infty[$;**
- **f est strictement croissante (monotone) sur $]-\infty;+\infty[$;**
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

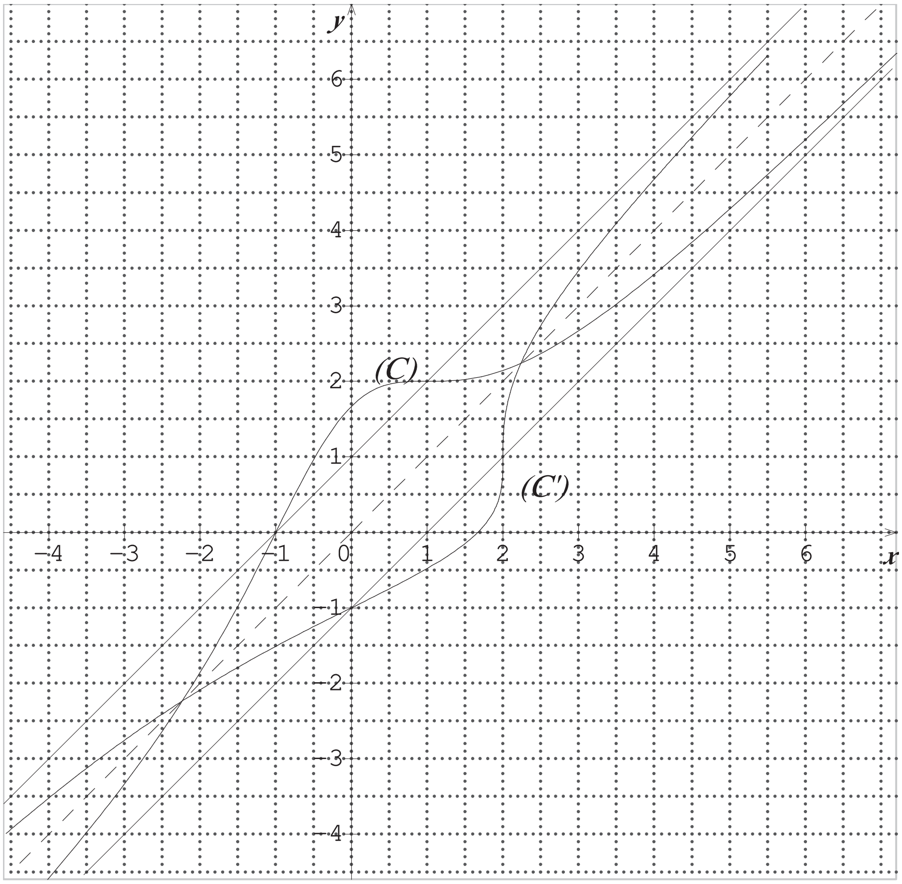
Donc $f :]-\infty;+\infty[\longrightarrow J =]-\infty;+\infty[$ réalise une bijection.

b) Construction :

Les courbes (C) et (C') sont symétriques l'une à l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$:

La courbe (C)	**La courbe (C')**
Admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$	**Admet une asymptote oblique d'équation $x = y - 1$ soit $y = x + 1$**
Coupe (Oy) en $(0;\frac{5}{3})$	**Coupe (Ox) $(\frac{5}{3};0)$**

Coupe (Ox) en (-1,0)	Coupe (Oy) en (0,-1)



c) On a $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$.

$f^{-1}(0)=-1$ **car** $f(-1)=0$**, et** $f'(x)=\dfrac{x^4+6x^2-16x+9}{(x^2+3)^2}\Rightarrow f'(-1)=2$.

Donc $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{2}$.

Corrigé 8

1.a) On a $P(x)=x^3-3x^2+2\Rightarrow P(1)=1-3+2=0$.

En utilisant la division euclidienne (ou le tableau d'Horner ou l'identification) on obtient : $P(x)=(x-1)(x^2-2x-2)$.

b) Pour le trinôme (x^2-2x-2), on a $\Delta=12=(2\sqrt{3})^2$ d'où les racines

$x_1=1-\sqrt{3}, x_2=1+\sqrt{3}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad$ $1-\sqrt{3}$	$\quad$ 1	$\quad$ $1+\sqrt{3}$	$+\infty$
x-1	-	-	+	+
x^2-2x-2	+	-	-	+
P(x)	-	+	-	+

2) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$

a) Calcul de limites :

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$. Il n y a pas d'asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x+2)=4>0$. Alors :

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0^-\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0^+\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

Alors la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

b) Calcul de la dérivée :

On a $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-2}$. Alors :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)(x-2)-(x^3-3x+2)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3-3x-6x^2+6-x^3+3x-2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-6x^2+4}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2P(x)}{(x-2)^2}$$

c) Le sens de variation de *f* dépend uniquement du signe de *P*. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		2		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	y_1	↗	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	y_2	↗	$+\infty$

$y_1 = f(1-\sqrt{3}) \simeq -1{,}4$ **et** $y_2 = f(1+\sqrt{3}) \simeq 19{,}3$.

3) La tangente est horizontale lorsque la dérivée s'annule, soit pour $1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$.

4) Si pour tout x de D_f **:**

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3-2ax^2+bx^2-2bx+cx-2c+d}{x-2} \quad \textbf{alors}$$

$$ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$$

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^3-3x+2}{x-2}=\frac{ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+d}{x-2}$$

par identification des coefficients : $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=-3 \\ d-2c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2a=2 \\ c=2b-3=1 \\ d=2c+2=4 \end{cases}$

Alors $f(x)=x^2+2x+1+\dfrac{4}{x-2}, \forall x \in D_f$.

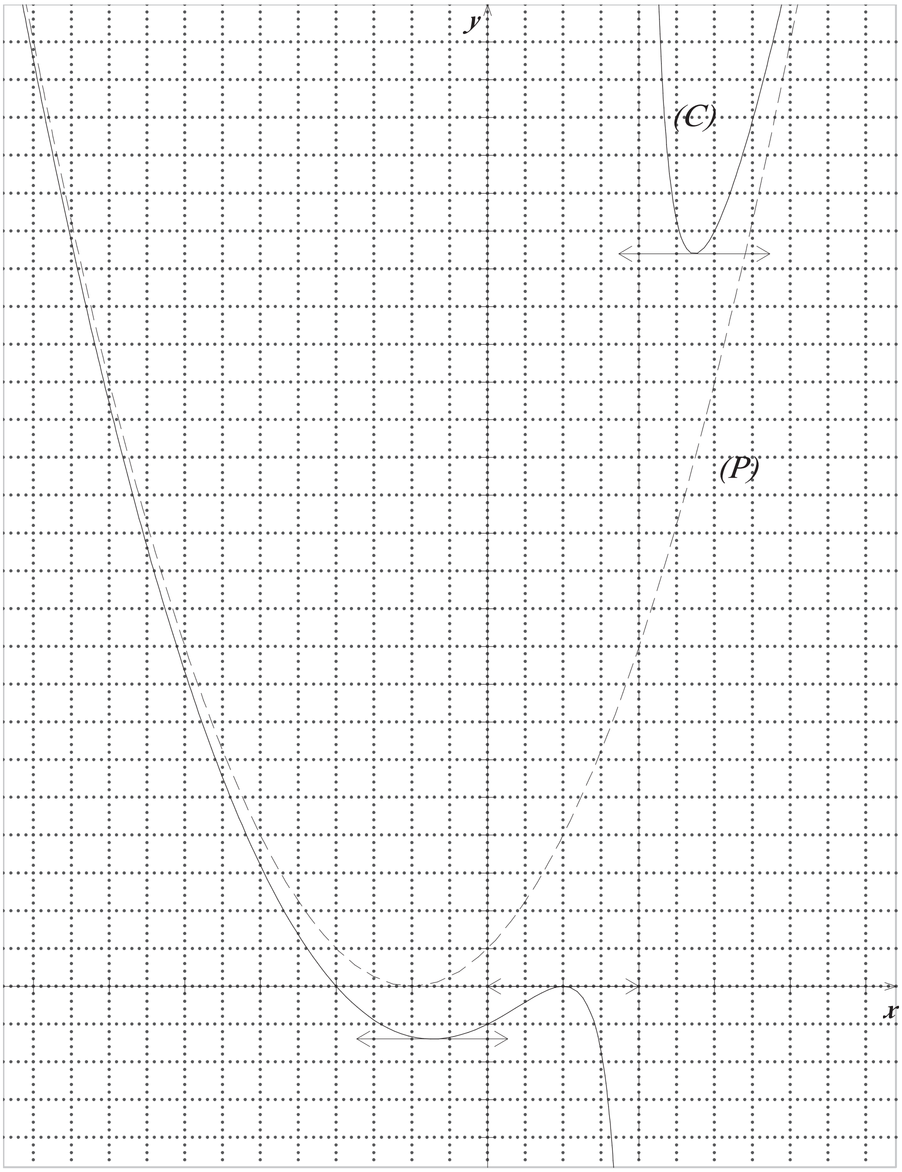
5. a) On a : $f(x)-g(x)=\dfrac{4}{x-2}$.

Alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$. **Donc les deux courbes sont asymptotes.**

b) Pour la position relative, il est clair que le signe de $f(x)-g(x)$ est celui de $\frac{4}{x-2}$:

$x<2 \Rightarrow f(x)-g(x)<0$ et C est en dessous de P

$x>2 \Rightarrow f(x)-g(x)>0$ et C est au-dessus de P.



V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{2x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1.a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

2.a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x+2}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique Δ, dont on donnera l'équation.

c) Etudier la position relative entre (C) et Δ

3. a) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

b) Montrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on précisera.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $g^{-1}\left(\dfrac{7}{4}\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{7}{4}\right)$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α que l'on déterminera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

d) Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de la fonction g^{-1} .

5) On considère l'intervalle $K=[2;3]$

a) Montrer que, $x\in K$ implique que $\forall x\in K$, $f(x)\in K$

b) Montrer que $\forall x\in K$, $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

6) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=g(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in K$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \le \frac{1}{2^n}$

d) En déduire la limite de (u_n).

Exercice 2

Partie A

Soit la fonction numérique définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $2 < \alpha < 3$.

3) Donner le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Calculer $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f(x) = x + 2 + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ à préciser puis étudier la position relative de (C) et Δ .

c) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Montrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur D_f (On pourra utiliser A.3).

4) Dresser le tableau de variations de f.

5) Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle la droite d'équation $y = x + 2$.

6) Donner une équation de la tangente de (C) en $x_0 = -2$

7) Construire la courbe (C)

8) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; -1[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 3

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$, $\forall x \in D_f$

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que C admet deux asymptotes D et D' dont l'une D est oblique.

Etudier les positions relatives de D et (C)

4.a) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Existe-t-il des points de (C) où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

5) Vérifier que pour tout x de D_f on a $f(4-x) + f(x) = 2$ et interpréter graphiquement.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0;2[$.

a) Montrer que $g : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c) Calculer $(g^{-1})'(-4)$. Donner, par deux méthodes différentes l'équation de la droite T' tangente à (C') courbe de g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = -4$.

7.a) Tracer les courbes (C) et (C') .

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2-(3+m)x+6+2m=0$. Retrouver ces résultats algébriquement.

Exercice 4

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^4-6x^2+1}{x^3-x}$ et sa courbe (C) dans un repère orthonormé.

1) Trouver *a*, *b* et *c* tels que $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x+1}$.

2) Déterminer l'ensemble de définition de f. Etudier la parité et les variations de f.

3) Calculer les limites de f aux bornes de D_f . Préciser les asymptotes à (C).

4) Etudier la position de (C) par rapport à la droite D d'équation ($y = x$).

5) Tracer D et C.

6) Résoudre l'équation f(x) = 0.

Exercice 5

Soit la fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et *C* sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm)

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.</u>

Soit *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction *g*.

2) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $2\le\alpha\le 3$ puis déterminer une valeur approchée de α à 5.10^{-1} près.

3) Etudier le signe de *g(x)* sur $\mathbb{R}$.

<u>Partie B : Etude de la fonction *f*.</u>

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$, $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$, $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$. En déduire que *C* admet une asymptote oblique *D* à l'infini. Etudier la position de *C* par rapport à *D*.

4) Déterminer les abscisses des points de *C* où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x+2$

5) Tracer la droite *D*, les tangentes du 4. ainsi que la courbe *C* .

6) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[3,+\infty[$.

a) Montrer que $h:I\to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

c) Calculer $(h^{-1})'(\dfrac{45}{8})$.

Exercice 6

Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$ pour tout $x\in D_f$.

2) Dresser le tableau de variations de f . Justifier que la courbe C n'admet pas de tangentes horizontales.

3) Montrer que C admet deux asymptotes et que leur point d'intersection est un centre de symétrie de C.

4) Etudier les positions relatives de C et son asymptote oblique.

5) Préciser les points d'intersections de C avec les axes.

6) On considère la droite D d'équation $2x-y-1=0$.

Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

7) Tracer la courbe C.

8) Soit k la restriction de f sur l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$.

a) Montrer que k réalise une bijection de $\left]-1,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire dans un nouveau repère orthonormé, les courbes représentatives de k et de sa réciproque .

c) Calculer $k^{-1}(0)$, $(k^{-1})'(0)$.

d) Donner l'équation de la tangente T' à la courbe C' de k^{-1} au point d'abscisse 0.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé

1) Montrer que pour tout x : $f(-x)=2-f(x)$; Interpréter graphiquement.

2) Montrer que le point de coordonnées $(0;1)$ est un point d'inflexion.

3) Etudier les variations de f.

4)Tracer la courbe de f.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}

b) Donner l'expression de f^{-1}

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} Tracer sa courbe.

Exercice 8

On considère la fonction numérique $f(x)=\sqrt{\left|x^2+3x-10\right|}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Ecrire f sans valeur absolue

2) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe (C)

3) Dresser le tableau de variation

4) Montrer que la partie de (C) sur $\left[-5,2\right]$ est un demi cercle à préciser.

5) Tracer (C).

Exercice 9 (Traduit)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall x\in D_f;\quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}.$$

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Montrer que la courbe C possède deux asymptotes D et D' dont l'une est oblique D. Préciser les position relatives de C et D.

4) Donner une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse $x_0=-2$.

5.a) Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $3x+y+1=0$.

b) Existe-t-il des points de C où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D.

6.a) Montrer que la courbe (C) admet le point $\Omega(1,3)$ comme centre de symétrie.

b) Tracer la courbe (C) après avoir placé ses éléments géométriques associés dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

7.a) Discuter algébriquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2+(1-m)x+2+m=0$.

b) Retrouver les résultats précédents graphiquement.

لتكن الدالة العددية $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$

وليكن (C) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حدد ميدان التعريف D_f وعين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث يكون:

$$.\forall x\in D_f;\quad f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

2) ارسم جدول تغيرات f .

3) بين أن (C) يقبل مقاربين D و D' أحدهما مائل D ، ثم حدد الوضع النسبي للمنحني (C) ومقاربه D.

4)أوجد معادلة المماس T للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$.

a.5) هل توجد نقط من (C) يكون المماس فيها موازيا للمستقيم ذي المعادلة $3x+y+1=0$ ؟

b) هل توجد نقط من (C) يكون المماس فيها عموديا على المقارب المائل D ؟

a.6) بين أن المنحنى (C) يملك مركز تناظر هو النقطة $\Omega(1,3)$.

b) مثل المنحنى (C) بعد وضع العناصر الهندسية المساعدة في المرجع $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a.7) ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$x^2+(1-m)x+2+m=0$$

b) أوجد النتائج السابقة بيانيا.

Dépôt légal N° 2176/2020

Bibliothèque nationale

Nouakchott

ESSEBIL Au Bac

Mathématiques

-

Dans les ouvrages de la collection ESSEBIL AU BAC- Mathématiques vous trouverez chaque trimestre:

- ✓ **Des résumés de cours pour réviser rapidement et mémoriser les formules**
- ✓ **Des QCM pour l'entraînement et la maîtrise des notions du programme**
- ✓ **Des exercices corrigés variés et progressifs pour teser et approfondir vos connaissances**
- ✓ **Des exercices de synthèse et des problèmes non corrigés pour préparer éfficacement l'épreuve du Bac**
- ✓ **Quelques traductions pour améliorer le niveau d'acquisition.**